



Facultad de Ciencias
**Astronómicas
y Geofísicas**
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Tesis de grado para obtener el título de Geofísico

*Ruido $1/f$ y reversiones del momento dipolar
magnético para diferentes dinamos esféricos*

Mauro Fontana

Director: Pablo Dmitruk

Codirector: Fabio I. Zyserman

La Plata, Argentina
Marzo de 2017

*A mis padres, Julio César y
María del Carmen*

Resumen

Hace más de un siglo que Bernard Brunhes propuso la existencia de reversiones del campo magnético terrestre en escalas de tiempo geológicas. Esta teoría, hacia mediados del siglo XX, logró la aceptación de la comunidad científica. No obstante, aún no ha sido posible establecer mecanismos precisos que permitan explicar las reversiones geomagnéticas. El presente trabajo muestra que, aún en una geometría sencilla, las ecuaciones de la magnetohidrodinámica difusiva y rotante contienen todos los ingredientes para reproducir satisfactoriamente numerosos rasgos del campo magnético terrestre, entre ellos los cambios en la polaridad del momento dipolar magnético. Asimismo se verifica la existencia de un extenso rango de frecuencias donde el momento dipolar magnético presenta invariancia de escala, fenómeno conocido como ruido $1/f$. Se conjetura que esta última característica, asociada a la presencia de memoria de largo plazo en el sistema, posee relación directa con la aparición de reversiones.

Abstract

More than one century ago, Bernard Brunhes proposed the existence of reversals in Earth's magnetic field at geological time scales. Halfway through the XX century, this theory got acceptance within the scientific community. Nonetheless, efforts to establish precise mechanisms to account for these reversals have been, so far, unsuccessful. In this work we show that, even for simple geometries, diffusive and rotating magnetohydrodynamic's equations present the key ingredients to reproduce several features of the geomagnetic field, including polarity reversals of the magnetic dipole moment. Moreover we demonstrate the existence of a wide range of frequencies where dipole moment's power spectrum presents scale invariance, a characteristic known as $1/f$ noise. We argue that this feature, associated to long-term memory phenomena, has a direct connection with the spontaneous flipping of the geomagnetic field.

Agradecimientos

De acorde a lo que dictan la etiqueta y Wikipedia¹ (sobre todo Wikipedia) en esta sección corresponde agradecer a la gente que contribuyó en este trabajo. En consecuencia, gustosamente agradezco a Pablo (Dmitruk) por haberme dado la oportunidad, sin conocerme, de realizar mi tesis en un tema que reúne tantas cosas que me gustan. No sólo eso, sino que siempre estuvo dispuesto a volver ameno el trabajo a distancia; dar pronta respuesta a los correos electrónicos, hacerme un lugar en su agenda con escasas horas de anticipación, fueron algunos de los gestos extra-académicos que tuvo para conmigo y que significaron una gran ayuda durante los últimos 12 meses. También debo reconocer el enorme aporte de Fabio (Zyserman). Si bien su rol inicial solamente incluía ajustar el presente trabajo a las exigencias reglamentarias, el mismo fue largamente excedido con una enorme dedicación para corregir $n + 1$ borradores con sumo detalle. Sin su aporte las próximas páginas serían aún más ilegibles. Finalmente, también resulta imprescindible agradecer a Pablo Mininni por haber ayudado en varios aspectos teóricos de forma completamente desinteresada. Fue definitivamente un codirector extra que la reglamentación no permitió acreditar.

Ya en un sentido más amplio que el presente trabajo, corresponde agradecer a las personas que conforman la Universidad Nacional de La Plata y a los ciudadanos que sostienen la existencia de universidades públicas y gratuitas. Sin estos últimos resultaría imposible para una gran cantidad de personas, incluido yo mismo, acceder a una formación universitaria de alta calidad como la brindada en la UNLP. En particular, también quiero dar las gracias al personal docente y no-docente que conforma la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, un lugar con una calidez humana realmente asombrosa. Adicionalmente agradezco a la Agrupación Estudiantil INTI tanto por su ética y accionar diario como por sumar formación política a mi paso por la carrera.

Nueve años en la universidad son intransitables sin amigos. Por ello debo dar las gracias, ante todo, a todos los compañeros de geofísica con los que compartí las cursadas, y también a los que vinieron después, a los que conocí en San Juan. Ambos grupos fueron imprescindibles para mantener mi interés por la carrera y para amenizar los malos momentos. Pero fundamentalmente debo agradecer a esa pandilla de astrónomos (o en camino a serlo) por haber sido una familia en La Plata. Darles aquí el espacio que

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Book_design#Front_matter

se merecen requeriría más que un par de apéndices. También quiero darle las gracias a la mítica banda *Os cachaças do sucesso* por haber conformado esta pata indispensable de la amistad durante los 6 meses de intercambio en UNICAMP.

También me siento agradecido de poder incluir aquí a mi compañera de estos últimos años: Débora. Tengo mucho, demasiado, por lo que agradecerle, pero fundamentalmente le doy las gracias por quererme tanto y permitirme quererla aún más. Es una compañera absolutamente maravillosa.

En último lugar (textual, no de importancia), agradezco enormemente a mis padres. No sólo por ser artífices económicos de estos nueve años de universidad, sino por ser dos personas ejemplares. Soy muy afortunado de haber nacido en su hogar y recibir tanto cariño. Y a dicho afecto tengo el agrado de sumarle el que me han brindado mis hermanos, abuelos, tíos, cuñadas y sobrinos. Gracias a todos.

Índice general

Introducción	IX
1. El campo magnético terrestre	1
1.1. Historia del magnetismo y el geomagnetismo	1
1.1.1. Magnetismo antes de Gilbert	1
1.1.2. Teoría magnética de Gilbert	3
1.1.3. Electrodinámica clásica	4
1.2. Estructura y modelado del campo geomagnético	6
1.3. Reversiones geomagnéticas	7
1.3.1. Historia de la teoría de reversiones geomagnéticas	7
1.3.2. La escala temporal de polaridad geomagnética	8
1.3.3. Características de las reversiones geomagnéticas	10
2. Origen del campo magnético principal	15
2.1. Conceptos físicos necesarios	15
2.1.1. Mecánica de fluidos	15
2.1.2. Parámetros adimensionales	18
2.1.3. Electrodinámica clásica	20
2.2. Magnetohidrodinámica (MHD)	22
2.3. Geodínamo	27
2.3.1. Concepto de dínamo	27
2.3.2. Mecanismos de convección en el núcleo externo terrestre	28
2.3.3. Caracterización del flujo en el núcleo externo	29
2.3.4. Ruido 1/f en el momento dipolar magnético	31
3. Simulación de un dínamo esférico utilizando una descomposición C-K	35
3.1. Descomposición de Chandrasekhar-Kendall	36
3.1.1. Campos force-free lineales	36
3.1.2. Expansión de \mathbf{v} y \mathbf{B} en autofunciones C-K	37
3.1.3. Condiciones de contorno	39
3.2. Ecuaciones para los coeficientes ξ^v y ξ^B	39

3.3. Cantidades cuadráticas y momento dipolar magnético	42
3.4. Resolución numérica	42
4. Metodología	47
5. Resultados	53
5.1. Cantidades cuadráticas y parámetros adimensionales	53
5.1.1. Energías y helicidadades	53
5.1.2. Parámetros adimensionales	55
5.2. Campo magnético obtenido para los dínamos de pequeña escala	56
5.2.1. Energía magnética en función de ℓ	56
5.2.2. Series temporal y espectral del momento dipolar magnético	61
5.3. Campo magnético obtenido para los dínamos dipolares	70
5.3.1. Energía magnética en función de ℓ	70
5.3.2. Series temporal y espectral del momento dipolar magnético	74
Conclusiones	83
Apéndice A. Gráficas de autofunciones de Chandrasekhar-Kendall	85
Bibliografía	97

Introducción

Hace más de 2.500 años el ser humano comenzó el estudio del campo geomagnético, mediante el análisis del fenómeno conocido hoy como magnetización remanente. Esta rama del conocimiento tuvo, mediante el uso de brújulas para navegación, un rol destacado en el desarrollo comercial y económico de los últimos dos milenios. Además de resultar fundamental para una gran variedad de tecnologías, el campo magnético terrestre ha sido y es esencial para la evolución de la Tierra. De no existir éste, miles de millones de años atrás nuestro planeta habría perdido su atmósfera por acción del viento solar, entre otras catástrofes.

No obstante la innegable importancia del campo geomagnético, hace menos de cien años que se formuló una teoría sobre el origen del mismo compatible con el conocimiento físico y geológico moderno: la *teoría del geodínamo*. Por otra parte, contemporáneamente al desarrollo de dicha teoría, estudios experimentales encontraron que el campo magnético terrestre cambió su polaridad reiteradas veces en el pasado geológico reciente. Dichas variaciones de polaridad, formalmente definidas como cambios en el signo de la componente \hat{z} del *momento dipolar magnético*, recibieron el nombre de *reversiones*. Investigaciones posteriores mostraron que las reversiones no tenían un período definido, exhibiendo tiempos propios entre miles y cientos de miles de años.

El marco físico-matemático de la teoría del geodínamo, conocido como *magnetohidrodinámica*, resultó compatible con la existencia de reversiones (P. Olson et al. 2007, pág. 69). Sin embargo, no se han encontrado en dicho marco mecanismos causales para los cambios de polaridad del campo geomagnético. Una posibilidad es que los mismos se produzcan por efecto del comportamiento caótico que rige en buena parte de los sistemas magnetohidrodinámicos, sin mediar un agente causal específico.

Durante las últimas décadas se ha mostrado, mediante experimentos y simulaciones, que varias cantidades de interés en magnetohidrodinámica presentan rangos de invariancia temporal (P. Dmitruk et al. 2011). Este fenómeno recibe el nombre de *ruido $1/f$* por su expresión matemática en el dominio espectral. En particular, estudios recientes han encontrado ruido $1/f$ en el momento dipolar magnético utilizando simulaciones de magnetohidrodinámica no disipativa (P. Dmitruk et al. 2014).

El objetivo propuesto para este trabajo fue el de analizar la existencia de ruido $1/f$ en el espectro de potencia del momento dipolar magnético en dínamos esféricos, rotantes

y disipativos. En particular, se propuso analizar dos tipos de dínamos bien distintos: los de pequeña escala, donde la energía magnética se concentra en configuraciones de escala muy pequeña; y los predominantemente dipolares, donde ésta se distribuye mayormente en la escala de configuración más grande para un campo magnético (la dipolar). Asociado a este segundo caso, un objetivo en sí mismo fue reproducir las condiciones para la inducción de un campo magnético con dichas características (las mismas pueden encontrarse en P. Roberts et al. 2000, págs. 1094-1098). Adicionalmente, se propuso estudiar rasgos estadísticos de las reversiones para los diferentes campos magnéticos dipolares, en caso que las hubiera y que se contara con suficiente cantidad de eventos de este tipo. Para llevar adelante estos objetivos se planteó el uso de simulaciones numéricas de alta precisión.

Si bien la situación de estudio propuesta dista de ser directamente comparable con la del dínamo terrestre, se consideró que de encontrar elementos de análisis interesantes en estas simulaciones (conceptualmente más simples), a futuro sería interesante replicar este trabajo en simulaciones del geodínamo.

Atendiendo al grado de especificidad del presente trabajo, y buscando que el mismo pueda ser de utilidad a una mayor cantidad de personas, la información se organizó de la siguiente manera:

- En el capítulo 1 se presentan generalidades sobre el campo magnético terrestre: el desarrollo histórico de nuestra concepción actual del mismo; cómo es su estructura y cómo se lo modela; el concepto de reversión, las características de las reversiones y la escala temporal de polaridad geomagnética.
- El capítulo 2 introduce superficialmente la teoría del geodínamo. Para ello se exponen primeramente algunos conceptos de mecánica de fluidos, electrodinámica clásica y de magnetohidrodinámica.
- En el capítulo 3 se presenta el método numérico utilizado para resolver las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en una esfera.
- El capítulo 4 detalla los detalles metodológicos que complementan la descripción del capítulo 3.
- En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos.
- En el capítulo final se presentan las conclusiones del trabajo.

Referencias

- Dmitruk, P. et al. (2011). «Emergence of very long time fluctuations and $1/f$ noise in ideal flows». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 83.6, págs. 1-15. ISSN: 15393755. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.066318](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.066318). arXiv: [arXiv:1105.5323v1](https://arxiv.org/abs/1105.5323v1).
- (2014). «Magnetic field reversals and long-time memory in conducting flows». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 90.4, págs. 1-7. ISSN: 15502376. DOI: [10.1103/PhysRevE.90.043010](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.043010). arXiv: [1409.7568](https://arxiv.org/abs/1409.7568).
- Olson, Peter et al. (2007). *Core Dynamics*. Ed. por Peter Olson et al. 1.^a ed. Vol. 8. Elsevier.
- Roberts, Paul et al. (2000). «Geodynamo theory and simulations». En: *Rev. Mod. Phys.* 72.4, págs. 1081-1123. ISSN: 0034-6861. DOI: [10.1103/RevModPhys.72.1081](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.1081).

CAPÍTULO 1

El campo magnético terrestre

1.1. Breve reseña histórica de la concepción del campo magnético terrestre y el magnetismo

1.1.1. Magnetismo antes de Gilbert

Se estima que fue la civilización griega, en el siglo VIII A.C. (Mattis 1981, págs. 1-17), la primera en notar los fenómenos magnéticos relacionados a la magnetita y al hierro. Sin embargo, lejos habrían estado de comprender el mecanismo que regía la interacción. Tales¹ y Anaxágoras² consideraron que la magnetita poseía alma propia. No estuvo más cerca Diógenes de Apolonia³ cuando teorizó que era la humedad de un trozo de hierro y la sequedad de la magnetita lo que provocaba su atracción mutua. A pesar de tener el conocimiento sobre la fuerza magnética, no parece que los griegos lo hayan utilizado para navegación. Los primeros documentos sobre el uso de brújulas se remontan a China (Smith 1968) y se sitúan alrededor del siglo II A.C. Esta civilización dedicó grandes esfuerzos a mejorar la fabricación de brújulas, lo que les permitió encontrar los efectos de la magnetización termorremanente.

Hacia el siglo XIII, el conocimiento sobre los fenómenos magnéticos llega a Europa, de la mano de la brújula con aguja de hierro. La primer interpretación europea sobre el funcionamiento de la brújula se puede apreciar en el poema *Complainte d'Amour*, de Guillaume le Clerc⁴, donde, a partir del modelo geocéntrico del universo, el autor asoció el norte magnético con la estrella *Polaris* y posteriormente concluyó que la magnetita

¹Tales de Mileto (Mileto, 625/624 a. C.-ibídem, 547/546 a. C.) fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego.

²Anaxágoras (500 - 428 a. C.) fue un filósofo presocrático que introdujo la noción de nous (mente o pensamiento) como elemento fundamental de su concepción física.

³Diógenes de Apolonia (ca. 460 a. C.: fl. 425 a. C.), filósofo griego originario de Apolonia Póntica, colonia milesia del Ponto Euxino.

⁴Guillaume le Clerc de Normandía (fl. 1210/1211–1227/1238) fue un escritor anglo-normando instalado en Inglaterra en el siglo XIII.

debía tener su origen en ese astro. Similarmente, el italiano Guido Guinizelli⁵, también en un poema, manifestó que Polaris otorgaba sus virtudes a la magnetita terrestre, y que era esta última la que modificaba el aire a su alrededor y, en última instancia, movía la aguja de la brújula. Si bien en principio puede parecer una interpretación de escaso valor, introdujo dos conceptos interesantes: que el comportamiento de la aguja se debía a elementos presentes en el propio planeta Tierra y que la interacción se propagaba por el aire. Esto último se puede considerar una forma primitiva de nuestro concepto actual de campo magnético.

Sin embargo, Petrus Peregrinus de Maricourt⁶ fue, probablemente, el mayor estudioso del funcionamiento de la brújula y el magnetismo antes de Gilbert. En su famoso *Epistola de Magnete*, considerada la primer publicación científica de la historia (Kono et al. 2007, pág. 5), refuta la concepción, común en la época, de que el hierro apuntase al norte porque las minas de magnetita estuvieran en esa región del mundo. Petrus era consciente que había depósitos de ese mineral en muchos lugares del mundo y se negaba a reconocer que, por algún motivo, los que estaban situados en el polo estuvieran en una situación preferencial. Asimismo, detalló en el mismo escrito una serie de experimentos para realizar sobre un trozo esférico de magnetita que permitían encontrar sus polos magnéticos. También, sin formalizar completamente el concepto, describe los meridianos magnéticos del imán y enuncia que la fuerza magnética es más fuerte y vertical en los polos.

Durante los siglos XIV y XV no se produjeron demasiados avances en el estudio de la fuerza magnética. Las ideas reinantes seguían siendo, mayormente, las del poema de Guinizelli. Los polos propuestos por Petrus Peregrinus eran ya indiscutibles, pero su refutación sobre la excepcionalidad de la magnetita polar no había conseguido suficientes defensores. Sin embargo, la teoría de la época debió ser levemente modificada con el descubrimiento de la declinación magnética⁷. Para ello la solución propuesta fue que las grandes montañas de magnetita, antes supuestas exactamente en el polo geográfico, se encontraban desplazadas con respecto a éste. Hacia el final del siglo XVI, Robert Norman⁸ encontró la inclinación magnética⁹, entre otros resultados.

Se desprende entonces que para el siglo XVII el magnetismo no era un fenómeno nuevo ni poco analizado. Las características más sobresalientes del campo magnético terrestre, a saber, su carácter dipolar y la declinación e inclinación magnéticas, ya habían sido reportadas. También se conocía la magnetización remanente y su relación con la temperatura. Sin embargo, faltaba una teoría que unificase las diversas ideas existentes en esta rama del conocimiento.

⁵Guido Guinizelli (Bolonia, c. 1230 – Monselice, Padua, c. 1276) es considerado uno de los primeros y más influyentes poetas de su época en lengua italiana.

⁶Petrus Peregrinus de Maricourt (fl. 1269) fue un estudioso francés del siglo XIII que realizó experimentos sobre magnetismo y escribió el primer tratado existente para las propiedades de imanes.

⁷La declinación magnética en un dado punto de la Tierra es el ángulo formado entre la dirección de la línea de campo del campo magnético y el meridiano geográfico que pasan por el lugar.

⁸Robert Norman fue un marinero, constructor de brújulas e hidrógrafo inglés de mediados del siglo XVI.

⁹La inclinación magnética en un lugar de la Tierra es el ángulo entre la horizontal y las líneas de campo del campo magnético.

1.1.2. Teoría magnética de Gilbert

En su famoso *De Magnete* (1893¹⁰), William Gilbert¹¹ escribió sobre los fenómenos magnéticos y eléctricos siendo, probablemente, el primero en realizar un ensayo completo y científico al respecto. Para ello se basó en los trabajos de muchos de los autores mencionados en la Sección 1.1.1, aunque abandonando las herramientas de las filosofías aristotélica y escolástica que caracterizaban sus conclusiones. También ideó numerosos experimentos y dispositivos propios. El más famoso de ellos es la *terrella* (pequeña Tierra), una pequeña esfera de magnetita similar a la de Petrus Peregrinus.

Gilbert fue el primero en concluir explícitamente que la Tierra era un imán esférico conformado por hierro, refutando la creencia de las grandes montañas de magnetita cercanas a los polos. Esta revolucionaria afirmación se basó en un paralelismo casi exacto entre el funcionamiento de la brújula sobre la Tierra y el del *versorium*, una pequeña aguja de hierro que usaba en sus experimentos, cerca de la *terrella*. Para arribar a dicha conclusión precisó, además, postular que la Tierra era esférica y que, excepto en una fina capa heterogénea exterior, se constituía enteramente de un material magnético base. De dicho material magnético base, y en función de la pureza de los procesos al que fuera sometido en su camino hacia el exterior, se obtenían la magnetita y el hierro mineral. Consideraba a esta *substancia magnética* la forma más pura de la propia Tierra, y la responsable de mantenerla en su estado de cohesión y movimiento. Vale mencionar que en aquella época, aún cuando se conocían los efectos de la temperatura sobre la magnetización, se desconocían las temperaturas alcanzadas en el interior terrestre.

No obstante resulten las más interesantes para contextualizar el presente trabajo, las afirmaciones relativas a la naturaleza terrestre representan sólo una parte de los temas tratados en *De Magnete*. Allí Gilbert aborda la historia de la magnetita, dónde se extrae en el mundo, su interacción con el hierro y otros minerales, los procesos de magnetización, la aparición de polos en elementos rectangulares, los cambios en la fuerza magnética cuando se interponen diferentes materiales, entre muchos otros tópicos. Asimismo presenta experimentos y explicaciones de la fuerza eléctrica, a la que consideraba una entidad completamente diferente. Aún cuando reportó y explicó gran cantidad de fenómenos magnéticos, su teoría contemplaba únicamente interacción entre imanes y se basaba fuertemente en la existencia de una substancia magnética. Pese a esto, y a la ausencia de leyes naturales en lenguaje matemático, *De Magnete* le valió a Gilbert el reconocimiento habitual como padre de la electricidad y el magnetismo.

En 1635, pocos años después de la muerte de Gilbert, Henry Gellibrand¹² publicó evidencia en favor de que la declinación magnética en un lugar cualquiera de la Tierra variaba lentamente en el tiempo (Stern 2004). Edmond Halley¹³ explicó el fenómeno

¹⁰Año de la edición utilizada, la publicación original es de 1600.

¹¹Sir William Gilbert (1544- 1603), también conocido como William Gilberd, fue un médico inglés, integrante del *Colegio Real de Medicina* y, en sus últimos años de vida, médico personal de la Reina Isabel I. Conjuntamente al ejercicio profesional de la medicina, practicaba la física y la filosofía como pasatiempo, con un fuerte interés sobre los fenómenos magnéticos y el método empírico.

¹²Henry Gellibrand (1597–1637), matemático inglés.

¹³Edmond Halley (Haggerston, 1656-1742) fue un astrónomo, matemático y físico inglés, conocido por el cálculo de la órbita del cometa Halley.

postulando que en el interior terrestre existían capas de sustancia magnética concéntricas y cada una rotaba levemente distinto a las demás. Casi 100 años después, en 1724, George Graham¹⁴ reportó pequeñas variaciones en la orientación de una aguja de hierro con duraciones en el orden de un día, configurando el primer reporte científico de lo que actualmente se denomina tormenta magnética. Sin embargo ninguno de estos resultados que mostraban la importancia de las variaciones temporales en los fenómenos magnéticos redundó en una nueva teoría magnética.

1.1.3. Electrodinámica clásica

En los años posteriores a la publicación de Gilbert, la discusión se centró en la metafísica sobre qué producía las fuerzas magnética y electrostática. Para esta última, Benjamin Franklin¹⁵ postuló que emergía de la presencia de un fluido especial presente en los materiales (idea que no distaba considerablemente de la de Gilbert sobre el magnetismo). Sin embargo, Charles François du Fay¹⁶ sugirió en 1733 una metafísica de dos fluidos, inspirado en el carácter atractivo o repulsivo, según el caso, de la interacción electrostática. Esta idea rápidamente se generalizó al estudio de imanes, dado el carácter dipolar de estos. En un estado no magnetizado, ambos fluidos ocuparían todo el volumen de material. Sin embargo, al magnetizarlo, cada uno de los fluidos se concentraría en un polo distinto. Hacia fines del siglo XVIII Charles-Augustin de Coulomb¹⁷ consideraba que los fluidos magnéticos, contrariamente a sus análogos eléctricos, no tenían libertad de movimiento sino que estaban confinados a cada molécula. Con esto buscaba explicar la aparición de un nuevo par de polos al seccionar un imán.

A comienzos del siglo XIX, Simeon Denis Poisson¹⁸ ideó un marco matemático para la teoría magnética de la época. Para ello se basó en el concepto de potencial estático, herramienta que le había resultado extremadamente útil para su trabajo en electrostática. Este enfoque simple le permitió resolver numerosos problemas de magnetostática, como así también cuantificar la magnetización de un material como suma de dos términos, debido a efectos superficiales el primero, y volumétricos el segundo. Sin embargo Poisson no contaba con conocimiento sobre el trabajo de sus contemporáneos, por lo que toda su teoría buscaba describir únicamente los experimentos de Coulomb (cimentados en la teoría de Gilbert). Ello hizo que, aún cuando internamente consistente, su teoría quedara relegada a un conjunto relativamente pequeño de aplicaciones en los años inmediatamente posteriores.

En junio de 1820, Hans Christian Ørsted¹⁹ publicó un resultado experimental alta-

¹⁴George Graham (1673-1751) fue un relojero, inventor y geofísico inglés.

¹⁵Benjamin Franklin (1706-1790) fue un político, polímata, científico e inventor estadounidense.

¹⁶Charles François de Cisternay du Fay (París, 1698 – 1739) fue un físico y químico francés, superintendente del Jardín du Roy.

¹⁷Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) fue un matemático, físico e ingeniero francés.

¹⁸Siméon Denis Poisson (1781-1840) fue un físico y matemático francés al que se le conoce por sus diferentes trabajos en el campo de la electricidad y por sus publicaciones acerca de la geometría diferencial y la teoría de probabilidades.

¹⁹Hans Christian Ørsted (1777-1851) fue un físico y químico danés, conocido por haber descubierto de forma experimental la relación física entre la electricidad y el magnetismo, y por aislar el aluminio.

mente valioso: la presencia de una corriente eléctrica movía levemente una aguja magnetizada. Sólo pocos meses después, André-Marie Ampère²⁰ presentaba un artículo explicando el ferromagnetismo como un producto de pequeñas corrientes microscópicas perpendiculares al eje del imán. Para noviembre de ese año había publicado los resultados de un experimento al respecto. Pocos semanas después Sir Humphry Davy²¹ realizaba una publicación similar. El ensayo de Oersted generó una revolución en el pensamiento de la época, dando origen al electromagnetismo.

La noción moderna de campo, fundamental para la electrodinámica clásica, tuvo su origen en Michael Faraday²². En 1845, y a pesar de no interesarse demasiado por la física teórica, éste expresó que las sustancias magnéticas interactuaban entre sí por medio de campos intermediarios y no por acción a distancia. Al desarrollar esta idea concluyó que la luz también se vería afectada por un campo magnético, premisa que comprobó experimentalmente, dando lugar al efecto que lleva su nombre. Faraday también exploró sistemáticamente los efectos de la fuerza magnética entre distintos materiales, de lo que dedujo que toda la materia tenía propiedades magnéticas, aunque generalmente éstas eran más bien débiles. La generación de un campo eléctrico debido a variaciones temporales de un campo magnético (inducción electromagnética) también se halla entre los (numerosos) descubrimientos que obtuvo Faraday con sus experimentos.

Hacia finales del siglo XIX James Clerk Maxwell²³ realizó para la electrodinámica un trabajo similar al de Poisson para la electrostática y magnetostática. Para ello, primero fue necesario recopilar y establecer convenciones comunes para todos los resultados de electrodinámica ya descritos matemáticamente. Luego debió formalizar él mismo algunos resultados de físicos puramente experimentales que no poseían buen manejo de la matemática. Esto incluyó, entre otros, los reportes de Faraday sobre inducción electromagnética. Finalmente, en base a consideraciones teóricas, predijo satisfactoriamente la existencia de corrientes de desplazamiento y de ondas electromagnéticas. Con el primero de esos resultados completó su teoría de la electrodinámica, aunque la formulación vectorial que conocemos actualmente se debe a Oliver Heaviside²⁴. Aún cuando la física del siglo XX introdujo un nuevo paradigma sobre los fenómenos electromagnéticos, la electrodinámica clásica, con leves modificaciones a la forma en que fue resumida por Maxwell, continúa siendo un marco de trabajo de enorme valor, usado en una gran cantidad de disciplinas científicas y tecnológicas.

²⁰André-Marie Ampère (1775-1836) fue un matemático y físico francés. Inventó el primer telégrafo eléctrico y, junto con François Arago, el electroimán.

²¹Humphry Davy (1778-1829) fue un químico británico. Se le considera el fundador de la electroquímica, junto con Alessandro Volta y Michael Faraday.

²²Michael Faraday (1791-1867) fue un físico y químico británico que estudió el electromagnetismo y la electroquímica. Sus principales descubrimientos incluyen la inducción electromagnética, el diamagnetismo y la electrólisis.

²³James Clerk Maxwell (1831-1879) fue un físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente.

²⁴Oliver Heaviside (1850-1925) fue un físico, ingeniero eléctrico, radiotelegrafista y matemático inglés.

1.2. Estructura y modelado del campo geomagnético

«Usualmente se define al campo magnético terrestre (también llamado campo geomagnético) como el campo magnético producido por todas las fuentes en el interior y exterior de la Tierra sólida hasta la llamada “magnetopausa”, la frontera dentro de la cual el campo magnético terrestre permanece confinado.» (Kono et al. 2007, pág. 33). Asimismo es usual restringir el término sólo a campos magnéticos de origen no-antropogénico y con frecuencias temporales de hasta unos pocos Hertz. Este límite arbitrario se debe, en parte, a los instrumentos utilizados históricamente para medir el campo magnético terrestre.

Matemáticamente, un campo magnético es un campo vectorial. Esto quiere decir que para describirlo es necesario precisar su dirección y magnitud, en cada punto del espacio. Es frecuente describir el campo geomagnético (\mathbf{B}) separándolo en tres términos, resultando $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{prin}} + \mathbf{B}_{\text{cort}} + \mathbf{B}_{\text{ext}}$, donde:

- \mathbf{B}_{prin} , llamado campo principal, es el campo magnético originado en el interior terrestre. Su intensidad representa, al menos, el 95 % de la intensidad total (el valor exacto depende de la ubicación geográfica y el clima espacial²⁵). Se considera que es producido por corrientes eléctricas en el núcleo externo de la Tierra.
- \mathbf{B}_{cort} , nombrado campo cortical, representa el campo magnético generado por rocas magnetizadas en regiones cercanas a la superficie terrestre. El nombre cortical puede resultar engañoso, ya que el término incluye el aporte de rocas del manto superior en algunas regiones del planeta. Dado que el origen del campo magnético cortical es la magnetización (inducida y/o remanente) de los minerales que conforman las rocas, es necesario que los mismos se hallen por debajo de su temperatura de Curie²⁶. Esto explica por qué la magnetización de los minerales no puede ser una fuente significativa para el campo magnético principal, contrariamente a lo que se pensaba hasta fines del siglo XIX.
- \mathbf{B}_{ext} , denominado campo externo, es el campo magnético que se origina fuera de la Tierra sólida, por acción de corrientes eléctricas. Es usual distinguir entre corrientes ionosféricas y magnetosféricas ya que la dinámica de las partículas cargadas en una y otra región varía substancialmente. \mathbf{B}_{ext} es el producto de complejas interacciones entre el viento solar, la magnetósfera y la ionósfera.

El aporte al campo geomagnético de cada una de las fuentes enumeradas varía en el tiempo. Dichos cambios pueden deberse a procesos periódicos (con diversas escalas

²⁵El clima espacial o meteorología del espacio se define como las condiciones físicas del Sol, el medio interplanetario, el campo geomagnético, la atmósfera terrestre y de la superficie terrestre que se encuentran influidas por la interacción Sol-Tierra.

²⁶Se denomina temperatura de Curie (en ocasiones punto de Curie) a la temperatura por encima de la cual un cuerpo ferromagnético pierde su magnetismo, comportándose como un material puramente paramagnético

temporales, que van desde las horas hasta, al menos, cientos de millones de años) o aperiódicos (variación secular). Es por este motivo que, para aplicaciones científicas y tecnológicas, resulta necesario contar con fidedignos pronósticos de tormentas magnéticas²⁵ y modelos del campo geomagnético interno que se actualicen regularmente. Para esto último, desde 1965 la Asociación Internacional de Geomagnetismo y Aeronomía (IAGA por sus siglas en inglés) publica, con periodicidad variable, el Campo Geomagnético Internacional de Referencia (IGRF por sus siglas en inglés). El IGRF es un desarrollo en armónicos esféricos cuyos coeficientes se ajustan, mayormente, con datos satelitales y de observatorios magnéticos de todo el mundo.

Analizando la magnitud de los diferentes términos del IGRF, se concluye que sobre la superficie terrestre, los términos asociados al momento dipolar magnético representan entre el 80 % y el 90 % del campo geomagnético, dependiendo de la región de estudio. Esto significa que el campo magnético en la superficie es, en primera aproximación, el generado por un dipolo magnético, y se lo puede describir (también en primera aproximación) a partir de la intensidad y dirección del momento dipolar magnético. Si se realiza un estudio similar en la interfaz manto-núcleo externo, se concluye que el término dipolar sigue siendo predominante aunque en este caso representa aproximadamente el 50 % de la energía magnética (Langel et al. 1982).

El campo geomagnético suele ser descripto, independientemente de la descomposición en sus tres fuentes, mediante su intensidad (B) y dos ángulos. El primero de ellos, llamado declinación (D), es el ángulo comprendido entre la dirección del polo norte geográfico y la dirección de la componente horizontal del campo magnético. El segundo, nombrado inclinación (I), es el ángulo entre la dirección del campo magnético y un plano horizontal. B , D e I varían espacialmente, siendo, en general, diferentes para cada punto sobre la superficie terrestre.

Otro parámetro encontrado frecuentemente en estudios paleomagnéticos es el de polo geomagnético virtual (VGP por sus siglas en inglés). Siempre es posible, en un dado punto de la Tierra, calcular un dipolo magnético geocéntrico que ajuste el campo magnético observado localmente. Se denomina polo geomagnético virtual al punto sobre la superficie terrestre que corresponde a uno de los polos de dicho dipolo.

1.3. Reversiones geomagnéticas

1.3.1. Historia de la teoría de reversiones geomagnéticas

A comienzos del siglo XX Bernard Brunhes²⁷ publicó un análisis sobre la magnetización remanente en arcillas y basaltos del Macizo Central (Francia) y encontró que la misma se orientaba en forma aproximadamente opuesta al campo magnético actual. Al interpretar estos resultados, sugirió que el campo geomagnético, durante la última cristalización de las rocas mencionadas, debía orientarse en forma contraria a su orien-

²⁷Bernard Brunhes (1867 - 1910) fue un geofísico francés conocido por su obra pionera en paleomagnetismo, en particular su descubrimiento, en 1906, de la reversión geomagnética. Posteriormente la inversión magnética de Brunhes-Matuyama se nombró en su honor.

tación actual. Sin embargo, y a pesar del gran prestigio de Brunhes, esta explicación fue desechada (Brown 2010). Se creía más adecuado en aquella época un modelo de reversión magnética espontánea en la propia roca, sin intervención del campo geomagnético²⁸.

En los años posteriores a Brunhes (quién murió días después de presentar sus primeros resultados), hubo pocos geocientíficos que abordaran la problemática de la polaridad magnética en rocas. Uno de ellos, Paul-Luis Mercanton²⁹, publicó en 1926 un análisis similar al de Brunhes pero con rocas de diversos lugares del planeta. En todos los casos encontró rocas con polaridad normal e invertida. En 1929, Motonori Matuyama³⁰ estudió la polaridad de rocas cuaternarias en China, Corea del Sur y Japón, encontrando de nuevo dos grupos de rocas: unas magnetizadas de acuerdo a la orientación actual del campo geomagnético y otras en dirección opuesta. Adicionalmente, Matuyama dató las rocas analizadas y encontró que las que presentaban una polaridad inversa a la actual habían cristalizado antes que las otras. Combinados, los estudios de Mercanton y Matuyama probaron la globalidad del fenómeno y la importancia de la edad de cristalización para la polaridad magnética. No obstante, la teoría de las reversiones del momento dipolar del campo geomagnético (reversiones geomagnéticas) no era mayormente aceptada.

Durante las décadas de 1930 y 1940 se encuentran muy pocos trabajos de paleomagnetismo sobre polarización de rocas. Sin embargo, en la década de 1950 hubo un aumento dramático en la cantidad de publicaciones al respecto. Con estos nuevos datos fue posible encontrar la trayectoria seguida por los polos magnéticos durante las reversiones. Posteriormente, con el famoso trabajo de Frederick Vine³¹ y Drummond Mathews³² (Vine et al. 1963), entre otros similares, se compatibilizaron las teorías de reversiones geomagnéticas, deriva continental y expansión del fondo oceánico.

1.3.2. La escala temporal de polaridad geomagnética

Más de medio siglo de estudios paleomagnéticos han permitido establecer que las primeras reversiones geomagnéticas observadas no representaban fenómenos aislados. La evidencia científica recabada permite asegurar que las inversiones en la polaridad del campo magnético terrestre se han producido consistentemente desde, al menos, el período Jurásico. En consecuencia, se desarrollan, desde la década de 1960, escalas temporales de polaridad geomagnética, como las mostradas en las Figuras 1.1a y 1.1b. El ajuste temporal para las polaridades durante la era Cenozoica ha registrado escasos cambios en las últimas dos décadas, sin embargo las dataciones de los eventos más antiguos son, según Kono et al. 2007, págs. 458-459, un tópico de debate e investigación actual.

Al analizar las primeras escalas temporales de polaridad geomagnética ya era posible observar la alta variabilidad del tiempo transcurrido entre reversiones (Heirtzler et al.

²⁸Si bien, posteriormente, la reversión espontánea sería comprobada experimentalmente (Kono et al. 2007, págs. 302-303, 374), esta teoría no explicaba la globalidad y simultaneidad de los eventos.

²⁹Paul Louis Mercanton (1876 – 1963) fue un meteorólogo, glaciólogo y explorador del ártico suizo.

³⁰Motonori Matuyama (1884 – 1958) fue un geofísico japonés.

³¹Frederick John Vine (1939 -) es un geólogo marino y geofísico, uno de los principales contribuyentes a la teoría de las placas tectónicas.

³²Drummond Hoyle Matthews (1931 – 1997) fue un geólogo marino y geofísico británico cuyas contribuciones fueron claves para la teoría de las placas tectónicas.

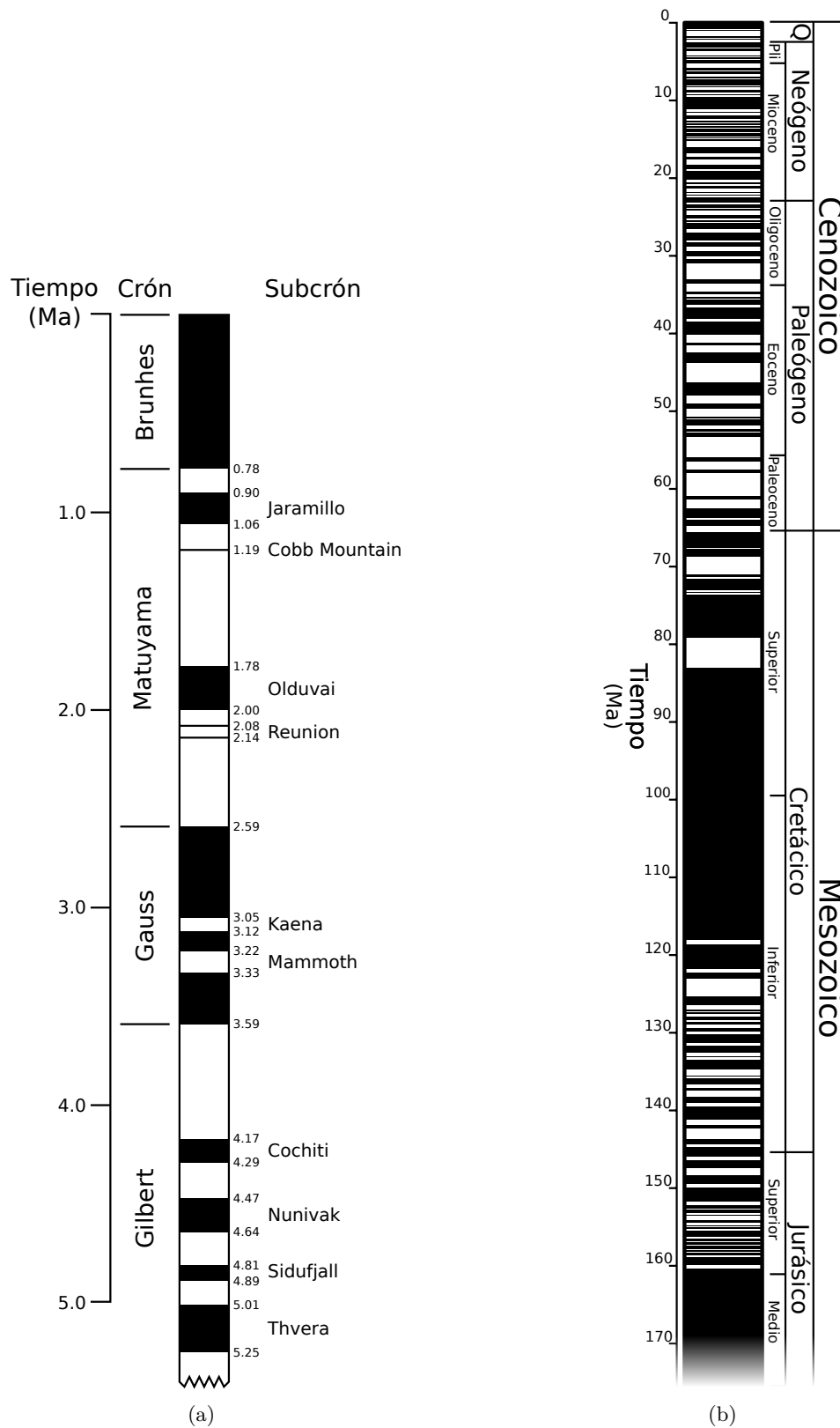


Figura 1.1: Escala de polaridad geomagnética durante (a) los últimos 5 millones de años, (b) los últimos 170 millones de años. En ambos casos se utilizan los colores negro y blanco para denotar periodos con polaridad igual o contraria a la actual, respectivamente. Imágenes originales en: https://en.wikipedia.org/wiki/Geomagnetic_reversal.

1968; Larson et al. 1972). En consecuencia, se desarrolló una nomenclatura donde se llamó épocas a los grandes períodos en los cuales la polaridad se mantenía, exceptuando breves interrupciones, constante, y eventos a los períodos asociados a dichas interrupciones. Las primeras se nombraron en honor a científicos pioneros en geomagnetismo. Los segundos recibieron su nombre en función de dónde fue estudiado originalmente ese breve período anómalo.

En la actualidad, la Comisión Internacional de Estratigrafía (ISC por sus siglas en inglés), aconseja el término zona para unidades magnetoestratigráficas, cróns para su equivalente temporal y cronozonas para unidades cronoestratigráficas. En cada caso, se utilizan, los prefijos mega, súper, sub o micro para denotar su duración. Se resumen los términos utilizados en el Cuadro 1.1. Bajo esta nueva convención, las épocas y eventos fueron renombrados a cróns y subcróns.

Históricamente se ha utilizado el término excursión magnética con múltiples significados. Algunos autores lo han empleado para describir períodos de polaridad magnética extremadamente breves. Sin embargo, en otros trabajos, el término refiere a mediciones dónde se aprecian apartamientos mayores a 45° del polo geomagnético virtual. Literatura reciente (Kono et al. 2007, pág. 376), propone utilizar el término excursión magnética para representar períodos con variación secular anómala pero sobre los cuales (acaso por limitaciones en la técnica empleada) no se puede determinar una reversión de polaridad.

1.3.3. Características de las reversiones geomagnéticas

Como se vio en el Sección 1.3.2, las inversiones de polaridad del campo magnético terrestre son un fenómeno relativamente frecuente y existen amplios registros de su existencia. Asimismo se han encontrado evidencias de que un fenómeno similar se produce en otros planetas y estrellas (Babcock 1959). Sin embargo, a la fecha, no ha sido posible establecer con precisión un mecanismo físico que las produzca. Es por ello que las características mencionadas en esta sección provienen únicamente de estudios paleomagnéticos.

En primer lugar, vale mencionar que, en comparación a la mayoría de los procesos geológicos, las reversiones geomagnéticas ocurren de forma rápida. No obstante, la complejidad del fenómeno (ver ejemplo en la Figura 1.2) resulta en dificultades para definir cuándo comienzan y en qué momento terminan las mismas. Estudios realizados sobre rocas sedimentarias encontraron una duración promedio de 7.000 años para cada una de las últimas cuatro reversiones (P. Olson et al. 2007). Sin embargo, trabajos similares, pero considerando las breves oscilaciones en la polaridad que se producen antes de que se concrete la reversión, estiman una duración de 18.000 años para la inversión de Matuyama-Brunhes (Figura 1.1a).

Otro rasgo interesante es que, durante el proceso de reversión geomagnética, no desaparece el campo magnético terrestre. Si bien la intensidad total de éste último disminuye notablemente, hay una transferencia de energía desde el término dipolar hacia los términos no dipolares del desarrollo en armónicos esféricos. Como consecuencia de ello, la duración de una reversión es, en general, diferente para latitudes bajas y altas (siendo menor en el primer caso).

Asimismo, a partir de modelos del campo paleomagnético ajustados con datos experimentales, es posible conocer algunas propiedades del campo geomagnético durante la reversión de Matuyama-Brunhes (Amit et al. 2010; Ingham et al. 2008). Los rasgos más sobresalientes son:

- Un incremento en la energía asociada a los términos no-dipolares. Simultáneamente se forma un parche en la zona ecuatorial que presenta un flujo inverso de campo magnético. Dicho parche se va desplazando en dirección polar.
- Cuando los términos no-dipolares alcanzan su valor máximo, la intensidad del campo comienza a disminuir de forma similar en todos los términos (dipolares y no-dipolares). Al alcanzar un valor mínimo, el campo en el hemisferio sur del cilindro tangente³³ invierte su polaridad.
- Aproximadamente 3.000 años después de la reversión en el hemisferio sur del cilindro tangente, sucede lo propio en el hemisferio norte del mismo.
- La energía del término dipolar, luego de fluctuaciones de alta frecuencia temporal, se estabiliza en valores semejantes a los presentes en el estado pre-reversión.

Por último, una característica comúnmente encontrada en las reversiones geomagnéticas, es el agrupamiento de las trayectorias seguidas por los VGPs. Las mismas se concentran mayormente en las zonas meridionales correspondientes a Australia y América (Laj et al. 1992). Sin embargo, la importancia de dichos hallazgos ha sido fuertemente debatida (P. Olson et al. 2007).

³³El cilindro tangente es un cilindro geocéntrico virtual cuyo eje de simetría coincide con el eje de rotación terrestre y que posee el mismo radio que el núcleo externo.

Cuadro 1.1: Nomenclatura para diferentes intervalos de polaridad. Tabla original en Kono et al. 2007.

Magnetoestratigráfica	Tipo de unidad		Duración (años)
	Equivalente geocronológico	Equivalente cronoestratigráfico	
Megazona de polaridad	Megacrón	Megacronozona	$10^8 - 10^9$
Superzona de polaridad	Supercrón	Súpercronozona	$10^7 - 10^8$
Zona de polaridad	Crón	Cronozona	$10^6 - 10^7$
Subzona de polaridad	Subcrón	Subcronozona	$10^5 - 10^6$
Microzona de polaridad	Microcrón	Microcronozona	$< 10^5$

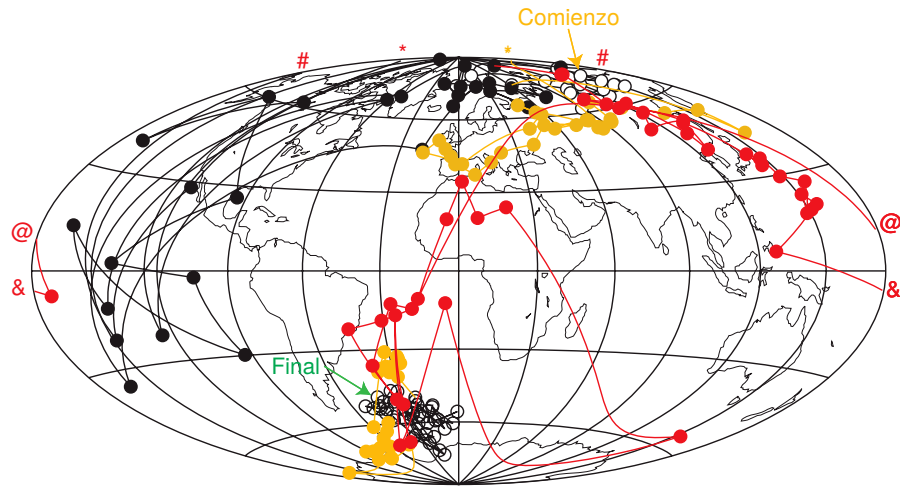


Figura 1.2: VGP durante la reversión de Gauss-Matuyama (2.58 Ma) registrado en sedimentos depositados en Searles Lake, California. Notar la complejidad de la trayectoria del VGP. Las excursiones inicial y final se presentan en naranja, las múltiples oscilaciones rápidas en negro y la fase principal de la reversión en rojo. Imagen aportada por G. Glatzmaier y R. Coe (en P. Olson et al. 2007, pág. 285), con datos originales de Glen et al. 1999.

Referencias

- Amit, Hagay et al. (2010). «Polarity reversals from paleomagnetic observations and numerical dynamo simulations». En: *Space Sci. Rev.* 155.1-4, págs. 293-335. ISSN: 00386308. DOI: [10.1007/s11214-010-9695-2](https://doi.org/10.1007/s11214-010-9695-2).
- Babcock, Harold D. (1959). «The Sun's Polar Magnetic Field.» En: *Astrophys. J.* 130, pág. 364. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/146726](https://doi.org/10.1086/146726). URL: <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/146726>.
- Brown, Maxwell (2010). «The Early History of Geomagnetic Field Reversals». En: *IRM Q.* 20.3. URL: <http://www.irm.umh.edu/quarterly/irmq20-3.pdf>.
- Gilbert, William (1893). *De Magnete (Translated by P. Fleury Mottelay)*.
- Glen, Jonathan M. G. et al. (1999). «A detailed record of paleomagnetic field change from Searles Lake, California: 2. The Gauss/Matuyama polarity reversal». En: *J. Geophys. Res. Solid Earth* 104.B6, págs. 12883-12894. ISSN: 01480227. DOI: [10.1029/1999JB900048](https://doi.org/10.1029/1999JB900048). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/1999JB900048>.
- Heirtzler, J. R. et al. (1968). «Marine magnetic anomalies, geomagnetic field reversals, and motions of the ocean floor and continents». En: *J. Geophys. Res.* 73.6, págs. 2119-2136. ISSN: 01480227. DOI: [10.1029/JB073i006p02119](https://doi.org/10.1029/JB073i006p02119). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/JB073i006p02119>.
- Ingham, Malcolm et al. (2008). «Behaviour of the geomagnetic field during the Matuyama-Brunhes polarity transition». En: *Phys. Earth Planet. Inter.* 168.3-4, págs. 163-178. ISSN: 00319201. DOI: [10.1016/j.pepi.2008.06.008](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2008.06.008).
- Kono, Masaru et al. (2007). *Geomagnetism*. Ed. por Masaru Kono et al. 1.^a ed. Vol. 5. Elsevier.
- Laj, Carlo et al. (1992). «Geomagnetic reversal paths». En: *Nature* 359.6391, págs. 111-112. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/359111b0](https://doi.org/10.1038/359111b0). URL: <http://www.nature.com/doi/10.1038/359111b0>.
- Langel, R. A. et al. (1982). «A geomagnetic field spectrum». En: *Geophys. Res. Lett.* 9.4, págs. 250-253. ISSN: 00948276. DOI: [10.1029/GL009i004p00250](https://doi.org/10.1029/GL009i004p00250). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/GL009i004p00250>.
- Larson, Roger L. et al. (1972). «World-Wide Correlation of Mesozoic Magnetic Anomalies, and Its Implications». En: *Geol. Soc. Am. Bull.* 83.12, pág. 3645. ISSN: 0016-7606. DOI: [10.1130/0016-7606\(1972\)83\[3645:WCOMMA\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1130/0016-7606(1972)83[3645:WCOMMA]2.0.CO;2). URL: [http://gsabulletin.gsapubs.org/cgi/doi/10.1130/0016-7606\(1972\)83\[3645:WCOMMA\]2.0.CO;2](http://gsabulletin.gsapubs.org/cgi/doi/10.1130/0016-7606(1972)83[3645:WCOMMA]2.0.CO;2).
- Mattis, Daniel C. (1981). *The Theory of Magnetism I*. Vol. 17. Springer Series in Solid-State Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 0-37. ISBN: 978-3-540-18425-6. DOI: [10.1007/978-3-642-83238-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-83238-3). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-83238-3>.
- Olson, Peter et al. (2007). *Core Dynamics*. Ed. por Peter Olson et al. 1.^a ed. Vol. 8. Elsevier.
- Smith, J.P. (1968). «Pre-gilbertian conceptions of terrestrial magnetism». En: *Tectonophysics* 6, págs. 499-510.

- Stern, David P. (2004). *The Great Magnet, the Earth*. URL: <http://www-spf.gsfc.nasa.gov/earthmag/dmglist.htm> (visitado 09-02-2016).
- Vine, F. J. et al. (1963). «Magnetic Anomalies Over Oceanic Ridges». En: *Nature* 199.4897, págs. 947-949. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/199947a0](https://doi.org/10.1038/199947a0). URL: <http://www.nature.com/doifinder/10.1038/199947a0>.

CAPÍTULO 2

Origen del campo magnético principal

En el [Capítulo 1](#) se detallaron algunos aspectos históricos y generales sobre el campo magnético terrestre. No obstante, los procesos físicos que dan origen al mismo fueron excluidos. En el presente capítulo, se expondrá, superficialmente, la teoría que presenta mayor consenso sobre la generación de campo magnético en el interior de la Tierra. La misma fue postulada por Joseph Larmor¹ hacia el año 1920 y se conoce como teoría de geodínamo.

Para comenzar, se detallará el marco de trabajo utilizado, conocido como magnetohidrodinámica (MHD). La magnetohidrodinámica se ocupa del estudio de algunos tipos de sistemas donde aparecen conjuntamente campos electromagnéticos y conductores de electricidad líquidos, gaseosos o electrolíticos. En este tipo de materiales, contrariamente a lo que ocurre en sólidos, la presencia de un campo magnético puede generar transporte de masa. Este movimiento, a su vez, puede modificar el campo magnético en la región de estudio, por ello en magnetohidrodinámica es usual encontrar acoplamiento mutuo entre procesos mecánicos y magnéticos.

Para describir matemáticamente el marco de trabajo de la magnetohidrodinámica, resultará conveniente repasar las hipótesis y ecuaciones que gobiernan tanto a la mecánica de fluidos como a la electrodinámica clásica.

2.1. Breve introducción de los conceptos físicos necesarios

2.1.1. Mecánica de fluidos

Al considerar el estudio de fluidos, será útil comenzar describiendo el concepto de fluido ideal. Esto evitará, de momento, introducir efectos más complejos como la disipación de energía o el comportamiento con características tanto sólidas como líquidas que se da en algunas situaciones para algunos materiales.

Se define como fluido ideal a una sustancia que verifica las siguientes propiedades:

¹Joseph Larmor (1857 – 1942) fue un físico y matemático que hizo importantes avances en el entendimiento de la electricidad, la dinámica y la termodinámica así como la teoría electrónica de la materia.

1. Puede dividirse en volúmenes (virtuales) de forma tal que cada uno contiene una gran cantidad de partículas. De esta manera es posible asignar variables termodinámicas clásicas (temperatura, presión, densidad, etc.) a estos volúmenes.
2. La densidad de volúmenes descriptos en el ítem 1 es lo suficientemente grande como para poder definir variables continuas en espacio y tiempo. Las cantidades de interés serán el campo de velocidades (\mathbf{v}), la presión (p), la densidad (ρ), la entropía específica (s), la temperatura (T) y la energía específica (ϵ).
3. Verifica la conservación de masa. Esto quiere decir que la variación en la cantidad de masa del sistema debe ser igual al flujo de masa a través de la frontera del mismo.
4. No admite tensiones de corte ni tracción. En la frontera de un elemento de fluido sólo puede haber tensiones normales compresivas (presión).

Los ítems 1 y 2 dan lugar a lo que se conoce como *aproximación de medio continuo*.

Las variables definidas en el ítem 2 se considerarán, durante este trabajo, en puntos fijos del dominio de estudio (enfoque euleriano) en lugar de describirse siguiendo la trayectoria de cada elemento de fluido (enfoque lagrangiano). Esto implica que a la hora de considerar variaciones temporales, no alcanza solamente con estudiar el cambio puramente temporal en el punto de estudio (\mathbf{r}), sino que hay que tener en cuenta las modificaciones que puede introducir el transporte local de masa. Esto equivale a una derivada temporal total en la dirección del campo de velocidades, llamada derivada substancial (o material) D/Dt , que se puede escribir en forma compacta mediante el operador:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (2.1)$$

El primer término del miembro derecho es la variación temporal explícita en un punto del espacio y el segundo término es el que considera las variaciones producidas por el transporte de masa.

Definida la derivada substancial, la ecuación para la conservación local de la masa puede ser escrita como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

La misma es llamada *ecuación de continuidad (de masa)*. Análogamente, resulta posible escribir la ecuación de movimiento del fluido como

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

o, equivalentemente

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{f} representa la totalidad de las fuerzas volumétricas (o volumétricas equivalentes) que actúan sobre cada elemento de fluido.

Caso gravitatorio

En el caso particular en que las únicas fuerzas actuantes son debidas a un gradiente de presión y a un campo gravitatorio (\mathbf{g}), de la Ecuación (2.4) se obtiene

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2} + \mathbf{g}. \quad (2.5)$$

Sin embargo, dado que \mathbf{g} es siempre un campo irrotacional, es posible escribir dicho término como el gradiente de un potencial ϕ ($\mathbf{g} = -\nabla \phi$). Definiendo $\mathcal{G} = p/\rho + \phi$ resulta

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{G} - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2}. \quad (2.6)$$

Sistema rotante

Otra situación interesante para los problemas usuales en geofísica es considerar el movimiento de un fluido visto desde un sistema que rota con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$. Se puede mostrar que si $\mathbf{\Omega}$ es constante, la ecuación de movimiento queda de la forma

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (2.7)$$

donde ahora todas las magnitudes son las observadas desde el sistema rotante. La cantidad $-2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$ representa la densidad de fuerza de Coriolis por unidad de masa y $-\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$ cuantifica la densidad de fuerza centrífuga, también por unidad de masa. Este último, que se notará $\mathbf{f}_{\text{cent}}/\rho$, es siempre irrotacional (dado que $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$). Por consiguiente, análogamente al caso gravitatorio, es posible definir un potencial ψ (tal que $\mathbf{f}_{\text{cent}}/\rho = -\nabla \psi$) y una cantidad $\mathcal{C} = p/\rho + \psi$ que permite escribir la ecuación de movimiento correspondiente como

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{C} - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (2.8)$$

Caso viscoso

Al estudiar fluidos reales (en contraposición a los fluidos ideales) suele ser necesario considerar rozamiento entre elementos de fluido. Esta interacción es, en general, compleja. Una descripción clásica completa del efecto de la viscosidad requiere analizar las componentes deviatoricas del tensor de tensiones para un fluido y utilizar argumentos de simetrías. Dicho análisis puede encontrarse en Batchelor (1970, págs. 141-147). Sin embargo, para numerosos problemas basta con considerar una tensión de cizalla proporcional a la variación de la velocidad. Formalizando esta idea, es posible escribir a la fuerza viscosa volumétrica (\mathbf{f}_{visc}) como

$$\mathbf{f}_{\text{visc}} = \chi \nabla^2 \mathbf{v},$$

donde la constante de proporcionalidad χ es la viscosidad dinámica, dependiente de la substancia material como así también de sus condiciones termodinámicas y ∇^2 es el operador laplaciano. A los fluidos en los cuales ésta suposición es válida se los llama fluidos newtonianos. Es usual normalizar χ por la densidad, obteniendo $\nu = \chi/\rho$. Se conoce a ν como *viscosidad cinemática* o difusividad de momento.

La ecuación de movimiento para un fluido newtoniano resulta entonces

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{(\nabla \rho)p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}. \quad (2.9)$$

Esta expresión es conocida como *ecuación de Navier-Stokes*. Vale la pena mencionar que es cuadrática en \mathbf{v} (término $[\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v}$ en $D\mathbf{v}/Dt$), motivo por el cual sólo se han encontrado soluciones analíticas de la misma para una cantidad muy reducida de escenarios².

Utilizando resultados obtenidos en las Ecuaciones (2.6), (2.8) y (2.9) es posible escribir, para un fluido newtoniano, bajo la acción de un campo gravitatorio y visto desde un sistema rotante, el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{P} - \frac{(\nabla \rho)p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (2.11)$$

$$h(p, \rho, T) = 0, \quad (2.12)$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \mathcal{E}. \quad (2.13)$$

\mathcal{P} , llamada *presión modificada*, se define como $\mathcal{P} = p/\rho + \psi + \phi$. h es una función que establece restricciones a los valores de las variables termodinámicas de la substancia. Usualmente se conoce a la función h como *ecuación de estado*. Finalmente \mathcal{E} es una función que describe la ganancia o pérdida de energía del sistema. Este conjunto de ecuaciones, con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno, describen completamente el comportamiento de un fluido bajo las hipótesis detalladas previamente. Aunque las Ecuaciones (2.12) y (2.13) no serán utilizadas explícitamente en el presente trabajo, han sido incluidas por completitud.

2.1.2. Parámetros adimensionales - Similitud dinámica

Con frecuencia se presenta la necesidad de realizar experimentos de situaciones impracticables en un laboratorio. A modo de ejemplo, resulta imposible simular el flujo de

²De hecho, demostrar la existencia y suavidad de las soluciones de la Ecuación (2.9) es un *Millenium Problem*. Los Millenium Prize Problems son 7 problemas matemáticos declarados de interés por el Clay Mathematics Institute en el año 2.000. Más información en <http://www.claymath.org/millennium-problems>.

un fluido dentro de un cascarón esférico con un radio interior de 1.221 km y un radio exterior de 3.481 km (como sería el caso terrestre). Es por este motivo que resulta de interés transformar las Ecuaciones (2.10)–(2.13) a variables adimensionales.

Si \mathcal{L} es una escala característica de longitud del problema (en el ejemplo mencionado sería 3.481 km – 1.221 km = 2.260 km) y \mathcal{V} una velocidad representativa del flujo en cuestión, es posible definir las siguientes variables adimensionales:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\mathcal{V}}, \quad t' = t \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{L}}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\mathcal{L}}.$$

Utilizando estas nuevas variables, y considerando que existe en el flujo una presión representativa p_0 , se construye

$$p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 \mathcal{V}^2},$$

donde ρ_0 es la densidad del fluido, considerada constante para este desarrollo. Es posible ahora escribir, para las variables primadas, la ecuación de movimiento de un fluido en el cual actúa sólo un gradiente de presión. La misma resulta

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla' p',$$

donde ∇' actúa sobre las coordenadas primadas (\mathbf{r}'). Esta ecuación muestra que, bajo las hipótesis empleadas, pueden existir flujos de características dinámicas similares pero donde sus magnitudes propias difieran entre sí varios órdenes de magnitud. Este resultado clave permite confeccionar experimentos de laboratorio que sean representativos de procesos geofísicos o astrofísicos.

Al escribir la Ecuación (2.11) en su forma adimensional, se obtiene

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla' \mathcal{P}' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{v}' - \frac{1}{Ro} 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}', \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 / \rho_0 \mathcal{V}^2$, $Re = \mathcal{L}\mathcal{V}/\nu$, $Ro = \mathcal{V}/\mathcal{L}\Omega$. Re y Ro reciben el nombre de número de Reynolds y Rossby respectivamente. Con los mismos conceptos se podrían transformar el resto de las ecuaciones intervinientes y las condiciones iniciales y de contorno a equivalentes adimensionales.

El parámetro adimensional Re puede obtenerse de la razón entre la magnitud del término inercial ($[\mathbf{v} \cdot \nabla]\mathbf{v}$) y la magnitud de la fuerza viscosa, considerando $\nabla \approx 1/\mathcal{L}$ y $v \approx \mathcal{V}$. Puede concluirse entonces que si $Re \ll 1$ las variables del flujo presentan variaciones suaves, puesto que el término inercial (no-lineal) puede despreciarse frente al término viscoso. Por el contrario, en el caso $Re \gg 1$, el rol de la viscosidad es despreciable en la mayor parte del fluido y aparece un comportamiento caótico, con fluctuaciones rápidas y estocásticas. Se dice que el fluido presenta un régimen *laminar* en el primer caso y *turbulento* en el segundo.

En forma equivalente a Re pueden definirse una gran cantidad de parámetros adimensionales a partir de comparar diferentes pares de términos en la ecuación de movimiento. Se detallarán algunos de ellos en la Sección 2.3.3.

2.1.3. Electrodinámica clásica

Para introducir sucintamente las bases de la teoría electromagnética clásica (cuyo contexto histórico se detalló en el [Sección 1.1.3](#)) se utilizarán como conceptos primitivos los campos vectoriales \mathbf{E} y \mathbf{B} , conocidos respectivamente como *campo eléctrico* y *magnético*. La descripción de los mismos se centrará, primeramente, en las expresiones matemáticas que los definen. Posteriormente se analizará en forma breve el significado físico de las mismas.

Definición de \mathbf{E} y \mathbf{B}

En el caso del campo eléctrico, su divergencia es proporcional a una cantidad escalar, llamada *densidad de carga eléctrica* ($\tilde{\rho}$). Esta última cumple un rol análogo a la densidad de masa utilizada en la gravitación newtoniana. Sin embargo, la analogía es sólo parcial, ya que la densidad de carga puede ser tanto negativa como positiva, simbolizando de esta forma el carácter tanto atractivo como repulsivo de la fuerza electrostática. Por otro lado, el rotor de \mathbf{E} resulta proporcional a una cantidad vectorial, *la variación temporal del campo magnético*. La aparición aquí del campo magnético, antes de ser propiamente definido, no es un error al organizar la información, sino una manifestación explícita del acoplamiento entre \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Por su parte, el campo magnético es siempre un campo solenoidal, es decir, su divergencia es nula. Por consiguiente, las líneas de campo³ del campo magnético son siempre cerradas. El rotor de \mathbf{B} introduce dos fuentes para el campo magnético. La primera de ellas, llamada *densidad de corriente eléctrica* (\mathbf{J}), representa el movimiento de carga eléctrica (corriente eléctrica) por unidad de área. La segunda fuente es la *variación temporal del campo eléctrico*, llamada también (salvo un factor de escala) *corriente de desplazamiento por unidad de área*.

En conclusión, las ecuaciones que gobiernan a los campos eléctrico y magnético en el vacío, utilizando las unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI — Gupta 2009—), son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.18)$$

ϵ_0 y μ_0 son constantes universales, llamadas *permitividad eléctrica del vacío* y *permeabilidad magnética del vacío*, respectivamente. c es otra constante universal, definida como

³A partir de un campo vectorial \mathbf{A} se definen sus líneas de campo como la familia de curvas tangentes a \mathbf{A} en todo punto del espacio, es decir $d\mathbf{l} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$, donde $d\mathbf{l}$ es un diferencial de curva.

$1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ y llamada *velocidad de la luz en el vacío*. Las ecuaciones descriptas se conocen como ecuaciones de Maxwell en el vacío.

Densidad de carga y corriente - Fuerza electromagnética

Dado que \mathbf{E} y \mathbf{B} dependen fuertemente de las cantidades $\tilde{\rho}$ y \mathbf{J} , resulta conveniente definir en forma más precisa las mismas. Para ello, se considerará a la carga eléctrica como una propiedad intrínseca de la materia. Un electrón tiene carga $-e$, un protón carga e y un neutrón no tiene carga (se llama a la cantidad e *carga eléctrica elemental*). Luego, para cualquier sistema discreto compuesto por una cantidad numerable de átomos, se definirá la carga eléctrica de ese sistema (Q) como la suma de la que poseen todos sus protones y todos sus electrones (considerando los signos correspondientes). Se tiene entonces, para un sistema con M protones y N electrones,

$$Q = (M - N)e.$$

Luego, para obtener la densidad de carga eléctrica ($\tilde{\rho}$), y considerando que el sistema es macroscópicamente uniforme, basta dividir Q por el volumen ocupado por el sistema (V),

$$\tilde{\rho} = \frac{Q}{V} = me - ne = \tilde{\rho}_p + \tilde{\rho}_e.$$

En la expresión anterior se han definido m y n como la cantidad de protones o electrones por unidad de volumen, respectivamente.

En el caso de \mathbf{J} el escenario es más complejo que un simple proceso aditivo, ya que intervienen las velocidades de las partículas. Sin embargo, en un sistema donde electrones y protones se mueven libremente⁴, llamando $i\mathbf{v}_e$ a la velocidad del i -ésimo electrón, se define la velocidad promedio $\bar{\mathbf{v}}_e$ como

$$\bar{\mathbf{v}}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N i\mathbf{v}_e.$$

Procediendo análogamente es posible definir $\bar{\mathbf{v}}_p$ para los protones. Con estas cantidades, el vector \mathbf{J} resulta ser

$$\mathbf{J} = e(m\bar{\mathbf{v}}_p - n\bar{\mathbf{v}}_e). \quad (2.19)$$

En el caso de que se tengan iones y electrones libres, situación que aparece frecuentemente en la naturaleza, la deducción es completamente análoga.

Definidos los campos eléctrico y magnético y sus fuentes, es posible expresar la fuerza electromagnética, también llamada *fuerza de Lorentz*⁵ (\mathbf{F}_L), experimentada por una partícula con carga eléctrica q que se mueve a una velocidad \mathbf{v} , como

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

⁴Esto evita considerar situaciones menos intuitivas, como el “movimiento” de huecos en una red cristalina.

⁵Hendrik Antoon Lorentz (Países Bajos, 1853 — Países Bajos, 1928) fue un físico neerlandés galardonado con el Premio Nobel de Física del año 1902.

o, escrita por unidad de volumen para una distribución de carga y una dada densidad de corriente,

$$\mathbf{f}_L = \tilde{\rho}\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.20)$$

Ley de Ohm simple

Dado que \mathbf{J} se relaciona con el movimiento de cargas eléctricas, pero que a su vez éstas se aceleran en presencia de campos eléctricos y magnéticos, resulta intuitivo suponer que, dado un material, \mathbf{J} será función de \mathbf{E} y de \mathbf{B} . En una gran cantidad de escenarios (Jackson 1975, págs. 287-288) basta considerar una relación lineal entre \mathbf{E} y \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.21)$$

donde σ se llama *conductividad del material*. En los casos $\sigma \rightarrow 0$ y $\sigma \rightarrow \infty$ se dice que se trata de un material aislante o conductor perfecto, respectivamente. Esta relación se conoce como *ley de Ohm simple*.

Transformaciones de Lorentz

Al igual que otras cantidades físicas, resulta de utilidad conocer cómo se transforman los campos al cambiar el sistema de referencia. La deducción completa de estas transformaciones para el caso inercial, llamadas transformaciones de Lorentz, pueden consultarse en su formulación tensorial en Jackson 1975, págs. 515-522. Sin embargo se utilizará aquí una versión más simple, válida cuando la velocidad relativa entre sistemas es mucho menor a la de la luz. En este caso puede demostrarse que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad del sistema primado observada desde el sistema sin primar y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Adicionalmente, hay que considerar que las cargas que en un sistema están en reposo, en otro pueden estar en movimiento, dando lugar a una corriente eléctrica. Con un procedimiento análogo al utilizado para transformar los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , puede verse que

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \tilde{\rho}\mathbf{u}. \quad (2.23)$$

2.2. Magnetohidrodinámica (MHD)

En esta sección se presentará el marco de trabajo de la magnetohidrodinámica. Sus límites de aplicación son motivo de frecuentes discusiones en el ámbito de la física. No obstante, la validez de su aplicación a los problemas del interior terrestre presenta alto

consenso (ver, por ejemplo, Aubert et al. 2007; Glatzmaier et al. 1995; P. Roberts et al. 2000).

Consideraciones iniciales

Para esquematizar los procesos electromagnéticos dentro de un material conductor resulta útil analizar, en primera instancia, la situación en que se aplica a este último un campo eléctrico de baja frecuencia temporal. Naturalmente, las cargas positivas y negativas que componen dicho material se aceleran. Sin embargo, si la densidad de partículas es lo suficientemente alta, estas chocarán entre sí luego de recorrer, en promedio, una distancia ℓ llamada *camino libre medio*. Cuando los procesos que interesa estudiar se producen a escalas de longitud mucho mayores que ℓ , es posible asignar una velocidad macroscópica a este movimiento. Por el contrario, si la escala de longitud de los procesos en análisis resulta del orden o menores que ℓ , es necesario considerar al sistema como una colección de partículas, cada una con comportamiento individual.

Si bien ℓ resulta una variable fácil de visualizar, una variable más apropiada para establecer la frontera entre comportamiento colectivo e individual en un sistema eléctricamente neutro y compuesto por material ionizado, es la llamada *longitud de apantallamiento de Debye*⁶ (λ_D). Esta cantidad representa la distancia a la cual el potencial coulombiano producido por una carga cae una proporción $1/e$.

Se puede mostrar (Blandford2013) que para un material formado por una única especie, en equilibrio termodinámico y para altas temperaturas, la longitud de Debye toma la forma

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon k_B T}{n^0 e^2}}, \quad (2.24)$$

donde k_B es la *constante de Boltzmann*, T es la temperatura (en Kelvin), ϵ es la permitividad eléctrica relativa⁷, n^0 es la densidad de iones y e es la carga eléctrica elemental (Sección 2.1.3). En el caso que existan K especies, es necesario sumar las K cantidades $n_k^0 q_k^2$ en el denominador. Puede interpretarse que los electrones se distribuyen alrededor de las cargas positivas de forma tal que a distancias mayores a λ_D se hace muy pequeño el potencial electrostático (que, si no fuera por este efecto, tendría un alcance mucho mayor). Generalmente se considera que a longitudes mayores que λ_D aparece un comportamiento macroscópico. Por el contrario, a escalas menores que λ_D , es necesario introducir técnicas de mecánica estadística, situación que no será tratada en este texto. No ha sido posible encontrar referencias al valor de λ_D en el núcleo externo. Sin embargo, considerando que en la ionósfera $\lambda_D \approx 1 \times 10^{-3}$ m, y que la densidad electrónica se incrementa sensiblemente más que la temperatura al pasar de la ionósfera al núcleo externo, se desprende que λ_D en este último es muy pequeño en comparación a su radio.

⁶Petrus (Peter) Josephus Wilhelmus Debye o Petrus Josephus Wilhelmus Debije (Países Bajos, 1884 - Estados Unidos, 1966) fue un físico-químico y profesor universitario estadounidense de origen neerlandés, autor de numerosos trabajos relacionados con la mecánica cuántica.

⁷La permitividad eléctrica relativa se calcula como el cociente entre la permitividad eléctrica del material y la del vacío.

Otro factor importante para la caracterización del material es la *frecuencia de colisión* (ω_{col}). En la deducción de la Ecuación (2.21), está implícito que se consideran promedios temporales mucho mayores que el período ($1/\omega_{\text{col}}$) de choque entre partículas cargadas. Sin embargo, para períodos más pequeños, comienza a haber separación de carga y fuerzas electrostáticas restauradoras. En dicho caso, es necesario considerar dos fluidos, uno dado por las cargas positivas y otro por las cargas negativas (ver, por ejemplo, Andrés et al. 2013). No será esta la situación que se analizará en este trabajo. Por el contrario, en situaciones donde se cumple $\omega < \omega_{\text{col}}$ y $L > \lambda_D$, siendo L una longitud característica de variación del problema de interés, es posible considerar un único fluido cuasi neutro ($\tilde{\rho} \approx 0$, excepto por leves fluctuaciones) en movimiento. Notar que esto no implica la ausencia de corriente eléctrica, ni que ésta sea paralela a la velocidad del fluido, ya que el apantallamiento no implica el acople de partículas individuales. Dicho de otra manera, a cada instante cada tipo de partícula posee libertad de movimiento y, dada las bajas frecuencias involucradas, se apantalla rápidamente con sus vecinas de carga opuesta. Puede verse (Andrés et al. 2013), que la velocidad mencionada es representativa del movimiento de los iones positivos, dado que éstos poseen mayor inercia.

En la mayor parte de los medios de interés, vale la ley de Ohm simple (Ecuación 2.21) en el sistema de referencia en que el material permanece en reposo. Si interesa utilizar esta ley en otro sistema de referencia más general, debe transformarse apropiadamente. Sean \mathbf{E}' y \mathbf{J}' el campo eléctrico y el vector densidad de corriente eléctrica en un sistema solidario al movimiento. Sea \mathbf{v} el campo de velocidades ($v \ll c$) del fluido en otro sistema de interés. Para cada punto pueden transformarse \mathbf{J}' y \mathbf{E}' de acuerdo a las Ecuaciones (2.22) y (2.23), obteniendo

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} - \tilde{\rho}\mathbf{v} \approx \mathbf{J}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.26)$$

donde se ha utilizado la hipótesis de cuasi-neutralidad. Con esto se puede formular la Ley de Ohm simple como,

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.27)$$

forma en la que será utilizada durante el resto del trabajo.

Simplificaciones en las ecuaciones electrodinámicas como consecuencia de la aproximación MHD

Si se consideran las ecuaciones electrodinámicas, las que gobiernan el movimiento del fluido (donde hay que incorporar la fuerza de Lorentz), las de conservación de masa y energía, en conjunto con las relaciones termodinámicas y constitutivas (ley de Ohm), se

obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon}, \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.33)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{P} - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2} + \tilde{\rho} \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (2.35)$$

$$h(p, \rho, T) = 0, \quad (2.36)$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \mathcal{E}. \quad (2.37)$$

Notar que en la ecuación de movimiento se agregó el término correspondiente a la fuerza de Lorentz completa. Sin embargo, la cantidad $\tilde{\rho} \mathbf{E}$ es muy pequeña frente al resto de las magnitudes involucradas (debido a la cuasineutralidad), por lo que es posible despreciarla. Por otra parte, la Ecuación (2.32) se verifica automáticamente a partir de las ecuaciones de Maxwell completas, pero fue incluida ya que debe cumplirse en cualquier aproximación de la electrodinámica.

El término de la corriente de desplazamiento $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ en la ecuación de Ampère-Maxwell introduce una corrección de orden v^2/c^2 (Jackson 1975, pág. 471). Por este motivo, en el marco de trabajo de la magnetohidrodinámica, donde $v \ll c$, se utiliza la versión pre-maxwelliana de dicha ecuación, resultando entonces

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}. \quad (2.38)$$

La ecuación de continuidad se reduce a $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, que se verifica automáticamente por ser \mathbf{J} obtenible a partir de un rotor.

Es usual utilizar la ley de Ohm y la ley de Ampère para reemplazar $\nabla \times \mathbf{E}$ en la Ecuación (2.30) por una función de \mathbf{v} y \mathbf{B} . Reemplazando \mathbf{J} por $\nabla \times \mathbf{B}/\mu$ en la Ecuación (2.33) se obtiene

$$\eta \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

donde se nombró η a $1/\sigma\mu$. η es llamada difusividad magnética del material. Si se resta el término derecho del segundo miembro a ambos lados de la ecuación y se aplica el rotor

a ambos miembros, a la vez que se asume un valor constante de η , resulta

$$\eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{E}.$$

Utilizando que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, es posible reescribir la ecuación anterior como

$$-\eta \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{E}.$$

Finalmente, reemplazando $\nabla \times \mathbf{E}$ de acuerdo a la Ecuación (2.30) se arriba a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.39)$$

Esta relación se conoce como *ecuación de inducción*, y resulta fundamental para los procesos de dínamo que serán expuestos en la próxima sección. El segundo término del miembro derecho da lugar a efectos difusivos y genera calor mediante un proceso conocido como *disipación óhmica*.

Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

Con la deducción de la ecuación de inducción, el campo eléctrico sólo interviene en la Ley de Ohm. Dado además que, en general, \mathbf{E} y $\tilde{\rho}$ no son cantidades que interesen directamente en problemas de MHD, es usual omitir la ecuación que los relaciona. En consecuencia, las ecuaciones que gobiernan los procesos magnetohidrodinámicos son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla \mathcal{P} - \frac{(\nabla \rho) p}{\rho^2} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \\ h(p, \rho, T) &= 0, \\ \rho T \frac{Ds}{Dt} &= \mathcal{E}. \end{aligned}$$

En caso que se desee recuperar el campo eléctrico \mathbf{E} o la densidad de carga $\tilde{\rho}$ basta con utilizar la ley de Ohm para obtener el primero y la ley de Gauss ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \tilde{\rho}/\epsilon$) para obtener el segundo.

Si se consideran sistemas donde la disipación de energía es despreciable (es decir, $\eta = \nu = 0$) las ecuaciones mostradas más arriba poseen tres cantidades cuadráticas invariantes: la energía total (E^{tot}), la helicidad magnética (H^{mag}) y la helicidad cruzada (H^{cruz}). Las mismas se definen como

$$E^{\text{cin}} + E^{\text{mag}} = E^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV + \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV, \quad (2.40)$$

$$H^{\text{mag}} = \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} dV \quad \text{y} \quad (2.41)$$

$$H^{\text{cruz}} = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (2.42)$$

donde V es el dominio del problema. E^{cin} y E^{mag} son, respectivamente, la energía cinética y magnética. Esta aproximación se conoce como MHD ideal y ha sido extensamente aplicada al estudio de diversos problemas que incluyen, entre otros, una gran cantidad de escenarios astrofísicos (Goedbloed et al. 2004). Sin embargo, los problemas de dínamo no pueden ser tratados en este escenario no disipativo y no existen, en dicho caso, cantidades conservadas.

2.3. Geodínamo

2.3.1. Concepto de dínamo

En el [Sección 2.2](#) se introdujeron las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido conductor bajo la acción de un campo magnético, en un sistema rotante y a velocidades no-relativistas. Dicha situación se ajusta satisfactoriamente al conocimiento actual sobre el núcleo externo.

Para entender la generación de campo magnético resulta relevante el sistema de ecuaciones

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{f}, \quad (\text{Ec. de movimiento})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (\text{Ec. de inducción})$$

donde \mathbf{f} representa, para el caso terrestre, la suma de efectos convectivos y de difusión mecánica. Para el caso terrestre, y a fines ilustrativos, es posible considerar un instante inicial con un campo magnético débil y uniforme ($\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{B}$ y $\mu \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \approx \mathbf{0}$) debido al campo magnético interplanetario. Bajo estas condiciones es posible despreciar el término $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ en la ecuación de movimiento, como así también el correspondiente a la disipación óhmica ($\eta \nabla^2 \mathbf{B}$) en la ecuación de inducción. Como resultado se obtiene un

sistema de ecuaciones desacoplado, donde, en general, un campo \mathbf{v} variable espacialmente producirá un cambio temporal en el campo magnético.

La situación propuesta en el párrafo anterior corresponde al estudio de los llamados *dínamos cinemáticos*. En éstos resulta posible despreciar la fuerza de Lorentz, por lo que es posible proponer \mathbf{v} y resolver para \mathbf{B} . Sin embargo, en numerosos escenarios, el campo de velocidades y un campo magnético de fondo generan un campo magnético local que crece hasta que el error de omitir la fuerza de Lorentz en la ecuación de movimiento no puede ser despreciado, por lo que hay que resolver el sistema acoplado. En esta situación, que incluye al campo geomagnético, se está ante un *dínamo magnetohidrodinámico*. Esta última clase de problemas, dada su complejidad matemática, fue relativamente poco estudiada hasta la masificación de las herramientas computacionales que tuvo lugar a fines del siglo XX.

Dentro de los resultados analíticos para dínamos cinemáticos, uno de los más famosos es el *teorema antidínamo de Cowling* (Cowling 1933). En el mismo se demuestra que no existe un dínamo autosostenible (i.e. que con el tiempo deja de requerir la existencia de un campo de fondo) donde \mathbf{B} sea estacionario y axialmente simétrico. Este fue el primero de varios teoremas similares (ver, por ejemplo, Hide et al. 1982) que introdujeron la necesidad de considerar simetrías más complejas (o ausencia de simetría) a la hora de estudiar los campos magnéticos planetarios o estelares. Adicionalmente se creó una nueva forma de estudio, llamada *electrodinámica del campo medio* (Krause et al. 1980; P. Olson et al. 2007, págs. 89-94).

Gracias a este nuevo marco teórico comenzó a entenderse como fundamental la importancia de la turbulencia (estructuras de pequeña escala en el campo de velocidades que interactúan caóticamente), la rotación diferencial y la helicidad cinética (H^{cin}) sobre los procesos de dínamo. H^{cin} es una cantidad topológica definida como

$$H^{\text{cin}} = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dV, \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ recibe el nombre de *vorticidad*. Un resumen de la electrodinámica de campo medio aplicada al geodínamo puede encontrarse en P. Roberts et al. (2000, págs. 1094-1098).

2.3.2. Mecanismos de convección en el núcleo externo terrestre

Para entender los procesos del núcleo externo, a veces resulta conveniente pensar el problema de dínamo como una máquina térmica. En este esquema, puede entenderse la dinámica del núcleo externo como 3 procesos interrelacionados: **calor y energía química** \rightarrow ⁸**energía mecánica** (convección); **energía mecánica** \rightarrow **energía electromagnética** (inducción); **energía magnética** \rightarrow **calor** (disipación óhmica). Adicionalmente participan de la dinámica del núcleo externo la radiación y la fuerza gravitatoria. Sin embargo, en general se considera despreciable el rol de la primera y desacoplada de la mencionada máquina térmica a la segunda, aunque algunos autores han sugerido que la

⁸A \rightarrow B denota la transformación de A en B.

precesión lunisolar tiene un rol importante en el proceso de dínamo (P. Roberts et al. 2000, pág. 1088). Los aspectos teóricos de los procesos de inducción y disipación óhmica se introdujeron en la subsección anterior, por lo que sólo resta exponer cualitativamente los fundamentos teóricos que explican el primer eslabón de la máquina de dínamo.

El proceso de convección en el núcleo externo genera movimientos ascendentes y descendentes de materia en el orden del mm s^{-1} , unos 6 órdenes de magnitud mayor que en el manto. Como causantes de este transporte aparecen dos factores: las *flotabilidades térmica y composicional*.

En el caso de la flotabilidad térmica, la situación resulta bastante curiosa. El flujo de calor en la interfaz núcleo-manto es un orden de magnitud mayor que en la interfaz que separa los núcleos interno y externo. Como consecuencia, puede entenderse que el núcleo externo se enfría de afuera hacia adentro, en un proceso que debería ser muy intenso para producir convección por sí mismo. Sin embargo, aunque parezca paradójico, la cristalización producto de la disminución de temperatura se da en la frontera entre los núcleos. Al ser ésta una reacción exotérmica, se libera energía en forma de calor latente, que favorece la aparición de inestabilidades convectivas.

Aún más sorprendente que un fluido enfriado por arriba que solidifica por abajo, es la importancia de la flotabilidad composicional. Se estima que la composición del núcleo interno es similar, aunque con mayor cantidad de Hierro, a la del núcleo externo. Como consecuencia de esa leve diferencia, durante el proceso de cristalización se liberan elementos livianos hacia el núcleo externo, lo que favorece el ascenso de material. Este efecto, propuesto por primera vez en la década del 60, es tan o más importante que la flotabilidad térmica para mantener la convección (P. Olson et al. 2007, pág. 14).

2.3.3. Caracterización del flujo en el núcleo externo

De todos los regímenes dinámicos posibles, sólo un subconjunto muy pequeño reproduce, en forma aproximada, el campo magnético observado en superficie. Para caracterizar este subconjunto, se introducen a continuación los parámetros adimensionales pertinentes y se mencionan estimaciones actuales sobre sus valores (resumidos en el Cuadro 2.1). El concepto de parámetro adimensional fue presentado en el Sección 2.1.2.

El *número de Ekman* (Ek) surge de comparar la magnitudes del término debido a la disipación mecánica ($\nu \nabla^2 \mathbf{v}$) y del que representa la fuerza de Coriolis ($\mathbf{f}_c \propto \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$). Sean \mathcal{V} y \mathcal{D} una velocidad y una longitud características del flujo y, se obtiene

$$\frac{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}|} \approx \frac{\frac{\nu \mathcal{V}}{\mathcal{D}^2}}{\Omega \mathcal{V}} = \frac{\nu}{\Omega \mathcal{D}^2} = Ek. \quad (2.44)$$

Para el dínamo terrestre toma un valor cercano a 10^{-15} . Se puede mostrar que Ek también está relacionado con el tamaño de la *capa de Ekman*. Ésta es una zona cercana a la frontera del dominio donde no es posible despreciar el efecto de la viscosidad frente a la fuerza de Coriolis. Su longitud es aproximadamente $\sqrt{Ek} \mathcal{D}$, lo que considerando que en el caso terrestre $\mathcal{D} \approx 2.260 \text{ km}$ da una medida de 10 cm.

Otro parámetro importante es el *número de Rayleigh* (Ra). Ra es la razón entre las fuerzas de flotación y viscosa. No se deducirá aquí su expresión, que puede consultarse

en Goluskin (2016, pág. 6); para los modelos usuales de dínamo toma la forma (Aubert et al. 2009)

$$Ra = \frac{g_0 f_0}{\rho \Omega^3 \mathcal{D}^4}. \quad (2.45)$$

En ésta última expresión g_0 y f_0 denotan, respectivamente, la aceleración gravitatoria y el flujo de masa, ambos en la interfaz entre los núcleos. Para el dínamo terrestre, $Ra \approx 10^{-12}$.

El *número de Reynolds* (Re) ya fue introducido anteriormente (Sección 2.1.2). Sin embargo, por completitud será expuesto nuevamente. Re contiene información sobre la intensidad del término advectivo ($[\mathbf{v} \cdot \nabla]\mathbf{v}$) frente al de disipación mecánica, es decir

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|} \approx \frac{\frac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{D}}}{\frac{\nu \mathcal{V}}{\mathcal{D}^2}} = \frac{\mathcal{V} \mathcal{D}}{\nu} = Re. \quad (2.46)$$

Su valor para el núcleo externo es 10^9 , lo que significa que el flujo es notablemente turbulento.

Comparando los dos términos que aparecen en la ecuación de inducción, es posible introducir el *número de Reynolds magnético* (Rm). Sea \mathcal{B} una intensidad típica del campo magnético, se obtiene

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \frac{\frac{\mathcal{V} \mathcal{B}}{\mathcal{D}}}{\frac{\eta \mathcal{B}}{\mathcal{D}^2}} = \frac{\mathcal{V} \mathcal{D}}{\eta} = Rm. \quad (2.47)$$

Para valores grandes de Rm la disipación óhmica es despreciable y vale la aproximación de *campo congelado*⁹. Sin embargo, para el caso terrestre $Rm \approx 10^3$, por lo que dicha hipótesis es frecuentemente cuestionada.

Finalmente, si se comparan los tiempos característicos de los diferentes procesos difusivos aparecen el *número de Prandtl* (Pr) y el *número de Prandtl magnético* (Pm). En ambos se compara la difusividad mecánica, frente a la térmica en el primer caso, y magnética en el segundo. Si κ es el coeficiente de difusividad térmica, dichos números quedan definidos por

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.48)$$

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}. \quad (2.49)$$

En el Cuadro 2.1 se presenta un resumen de los parámetros descriptos, como así también estimaciones modernas de sus valores para el núcleo externo, extraídas de Sanchez et al. 2016, pág. 35.

⁹En la aproximación de campo congelado, equivalente a la de conductor perfecto, las líneas de campo magnético quedan totalmente acopladas a la materia, moviéndose con ésta. Este resultado se conoce como teorema de Alfvén.

Símbolo	Nombre	Definición	Valor para el núcleo externo
Ek	Ekman	$\nu/\Omega\mathcal{D}^2$	10^{-15}
Ra	Rayleigh	$g_0 f_0 / \rho \Omega^3 \mathcal{D}^4$	10^{-12}
Re	Reynolds	$\mathcal{V}\mathcal{D}/\nu$	10^9
Rm	Reynolds magnético	$\mathcal{V}\mathcal{D}/\eta$	10^3
Pr	Prandtl	ν/κ	10^{-1}
Pm	Prandtl magnético	ν/η	10^{-6}

Cuadro 2.1: Resumen de los parámetros que caraterizan la dinámica del núcleo externo terrestre y sus valores.

2.3.4. Ruido $1/f$ en el momento dipolar magnético

Como se mencionó en el [Sección 1.3](#), las reversiones geomagnéticas no presentan períodos temporales claros. Al analizar el contenido en frecuencia del momento dipolar magnético (\mathbf{m}), se ha sugerido un decaimiento de la forma $1/f$ en una porción del espectro (Constable et al. 2005; Ziegler et al. 2011). Dicho comportamiento, conocido como *ruido* $1/f$, ha sido encontrado en procesos de diversas disciplinas que abarcan desde la física de semiconductores hasta el mercado de valores (Dutta et al. 1981; Montroll et al. 1982).

Una curva $1/f$ es la única forma espectral que no presenta una frecuencia (o tiempo) característico, ya que su integral en un intervalo (f_1, f_2) es la misma que entre $(\alpha f_1, \alpha f_2)$. Dicho de otra forma, el contenido en frecuencia entre 1 Hz y 2 Hz es idéntico al que aparece entre 1 kHz y 2 kHz. Esta propiedad representa la *invariancia de escala temporal* del proceso subyacente.

Dado que existe una gran cantidad de fenómenos que muestran este tipo de comportamiento, se han dedicado esfuerzos a formular principios matemáticos comunes que los rijan. En consecuencia se han propuesto diversas distribuciones estadísticas que, al menos en un rango acotado, reproducen una curva $1/f$ (ver, por ejemplo, Kendal et al. 2011; Montroll et al. 1982). Sin embargo, los mecanismos mediante los cuales emerge dicha propiedad dependen de las particularidades del problema en estudio.

En el caso de la magnetohidrodinámica se ha conjeturado que la interacción no-local entre procesos de diferentes escalas puede dar lugar a espectros de potencia de la forma $1/f$ para diferentes regímenes y condiciones de contorno (P. Dmitruk et al. 2011; Ponty et al. 2004). En particular, para el momento dipolar magnético y en el caso MHD ideal, se ha sugerido una relación directa entre la presencia de ruido $1/f$ y una función de distribución del tiempo de espera entre reversiones, τ , de la forma $\tau^{-\alpha}$ (P. Dmitruk et al. 2014). Cabe resaltar que, para el caso terrestre y dentro de un cierto rango temporal, las reversiones se distribuyen de dicha manera.

Referencias

- Andrés, N. et al. (2013). «Effects of electron inertia in collisionless magnetic reconnection». En: *arXiv Prepr.* 21.7, págs. 2-7. ISSN: 1070-664X. DOI: [10.1063/1.4890021](https://doi.org/10.1063/1.4890021). arXiv: [1312.2437](https://arxiv.org/abs/1312.2437). URL: <http://arxiv.org/abs/1312.2437>.
- Aubert, Julien et al. (2007). «Detecting thermal boundary control in surface flows from numerical dynamos». En: *Phys. Earth Planet. Inter.* 160.2, págs. 143-156. ISSN: 00319201. DOI: [10.1016/j.pepi.2006.11.003](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2006.11.003).
- Aubert, Julien et al. (2009). «Modelling the palaeo-evolution of the geodynamo». En: *Geophys. J. Int.* 179.3, págs. 1414-1428. ISSN: 0956540X. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2009.04361.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2009.04361.x).
- Batchelor, G.K. (1970). *An Introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, págs. 228-244. ISBN: 052104118x.
- Constable, Catherine et al. (2005). «A paleomagnetic power spectrum». En: *Phys. Earth Planet. Inter.* 153.1-3, págs. 61-73. ISSN: 00319201. DOI: [10.1016/j.pepi.2005.03.015](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2005.03.015).
- Cowling, T. G. (1933). «The Magnetic Field of Sunspots». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 94.1, págs. 39-48. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/94.1.39](https://doi.org/10.1093/mnras/94.1.39). URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1093/mnras/94.1.39>.
- Dmitruk, P. et al. (2011). «Emergence of very long time fluctuations and 1/f noise in ideal flows». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 83.6, págs. 1-15. ISSN: 15393755. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.066318](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.066318). arXiv: [arXiv:1105.5323v1](https://arxiv.org/abs/1105.5323v1).
- (2014). «Magnetic field reversals and long-time memory in conducting flows». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 90.4, págs. 1-7. ISSN: 15502376. DOI: [10.1103/PhysRevE.90.043010](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.043010). arXiv: [1409.7568](https://arxiv.org/abs/1409.7568).
- Dutta, P. et al. (1981). «Low-frequency fluctuations in solids: 1f noise». En: *Rev. Mod. Phys.* 53.3, págs. 497-516. ISSN: 00346861. DOI: [10.1103/RevModPhys.53.497](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.53.497).
- Gallavotti, Giovanni (2015). *Foundations of Fluid Dynamics*. URL: <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/libri.html>.
- Glatzmaier, G.A. et al. (1995). «A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal». En: *Nature* 377.6546, págs. 203-209. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/377203a0](https://doi.org/10.1038/377203a0). URL: papers3://publication/uuid/FC93F478-2CAD-4F55-9FB0-F549A785818D.
- Goedbloed, J. P. et al. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Vol. 6, pág. 613. ISBN: 0521626072. DOI: [10.1017/CB09780511616945](https://doi.org/10.1017/CB09780511616945). URL: http://books.google.co.uk/books/about/Principles_of_Magnetohydrodynamics.html?id=FvM6rMJob-cC%7B%5C%7Dpgis=1.
- Goluskin, David (2016). *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham: Springer International Publishing, pág. 64. ISBN: 978-3-319-23939-2. DOI: [10.1007/978-3-319-23941-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23941-5). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-23941-5>.

- Gupta, S. V. (2009). *Units of measurement. Past, Present and Future. International System of Units*. Springer. ISBN: 9783642007378. URL: <https://www.amazon.com/Units-Measurement-International-Springer-Materials/dp/3642007376>.
- Hide, R. et al. (1982). «Generalization of Cowling's theorem». En: *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 19.3-4, págs. 301-309. ISSN: 0309-1929. DOI: [10.1080/03091928208208961](https://doi.org/10.1080/03091928208208961). URL: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03091928208208961>.
- Jackson, John David (1975). *Classical Electrodynamics*. 2.^a ed. Wiley. ISBN: 047130932X.
- Kendal, Wayne S. et al. (2011). «Tweedie convergence: A mathematical basis for Taylor's power law, 1/f noise, and multifractality». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 84.6, págs. 1-10. ISSN: 15393755. DOI: [10.1103/PhysRevE.84.066120](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.066120).
- Krause, F. et al. (1980). *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Pergamon Press. ISBN: 0080250416.
- Lifshitz, L. D. et al. (1984). *Electrodynamics of Continuous Media, Second Edition: Volume 8 (Course of Theoretical Physics)*. 2.^a ed. Butterworth-Heinemann, págs. 225-253. URL: <http://amazon.com/o/ASIN/0750626348/>.
- Machlup, Stefan (1981). «Earthquakes, Thunderstorms and other 1/f noises». En: *Six Int. Conf. Noise Phys. Syst.* Ed. por P.H.E. Meijer et al. Washington DC, págs. 157-160. URL: https://books.google.com.ar/books?id=e3VPJTik_HgC%7B%5C%7DpPg=PA157%7B%5C%7DlPg=PA157%7B%5C%7DdPg=Machlup+Earthquakes,+Thunderstorms+and+Other+1/f+Noises%7B%5C%7Dsource=bl%7B%5C%7Ddots=0JrHMN4BDz%7B%5C%7Dsig=-A8biOMX_UyXghMVbeRQT_wAC5g%7B%5C%7Dhl=en%7B%5C%7Dsa=X%7B%5C%7Dved=0ahUKEwiyrqewwqnRAhWEPpAKHb86A9oQ6AEIGjAA%7B%5C%7Dv=onepage%7B%5C%7Dq=M.
- Montroll, Elliot W. et al. (1982). «On 1/f noise and other distributions with long tails». En: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 79. May, págs. 3380-3383.
- Olson, Peter et al. (2007). *Core Dynamics*. Ed. por Peter Olson et al. 1.^a ed. Vol. 8. Elsevier.
- Ponty, Yannick et al. (2004). «Simulation of induction at low magnetic prandtl number». En: *Phys. Rev. Lett.* 92.14, págs. 144503-1. ISSN: 00319007. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.144503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.144503). arXiv: [0311130 \[physics\]](https://arxiv.org/abs/0311130).
- Roberts, Paul H. (1967). *An Introduction to magnetohydrodynamics*. Longmans.
- Roberts, Paul et al. (2000). «Geodynamo theory and simulations». En: *Rev. Mod. Phys.* 72.4, págs. 1081-1123. ISSN: 0034-6861. DOI: [10.1103/RevModPhys.72.1081](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.1081).
- Sanchez, Sabrina et al. (2016). «Assimilation of geomagnetic data into dynamo models, an archeomagnetic study». Tesis doct.
- Ziegler, L. B. et al. (2011). «Asymmetry in growth and decay of the geomagnetic dipole». En: *Earth Planet. Sci. Lett.* 312.3-4, págs. 300-304. ISSN: 0012821X. DOI: [10.1016/j.epsl.2011.10.019](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2011.10.019). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2011.10.019>.

CAPÍTULO 3

Simulación numérica de un dínamo esférico utilizando una descomposición de Chandrasekhar-Kendall

Como se detalló en la [Introducción](#), se propone para el presente trabajo estudiar diferentes regímenes de dínamos esféricos MHD. Dada la dificultad analítica del problema mencionado, se resolverán numéricamente las ecuaciones de movimiento e inducción. De las numerosas técnicas posibles, se utilizará una descomposición de Chandrasekhar-Kendall y un esquema implementado mediante un código Fortran 95, paralelizado utilizando MPI y desarrollado por Pablo D. Mininni. Resultados del mismo han sido publicados, entre otros, en Mininni et al. ([2006](#), [2007](#)).

El modelo físico subyacente a dicho código considera un fluido que ocupa el volumen de una esfera cuya frontera gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$. La dinámica es analizada desde un sistema que rota en forma solidaria a ésta, por lo que resulta necesario considerar la fuerza de Coriolis en la ecuación de movimiento. Asimismo se considera el caso de flujo incompresible (discusiones sobre incompresibilidad en el núcleo externo terrestre pueden encontrarse en P. Olson et al. [2007](#), pág. 252; Braginsky et al. [1995](#), pág. 52) y se desprecian efectos térmicos. Esto último y la ausencia de una frontera esférica interna, representan un considerable apartamiento del caso terrestre. Sin embargo, el modelo propuesto, más sencillo de analizar, podría arrojar conclusiones interesantes para contrastar a futuro con modelos numéricos que representen mejor el geodínamo. Bajo las condiciones físicas descritas, el sistema de ecuaciones de interés resulta (ver [Sección 2.2](#))

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\mathcal{P} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{v} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta\nabla^2\mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Mediante la hipótesis de incompresibilidad y la omisión de efectos térmicos, ha sido

posible obviar las ecuaciones de estado y energía. También de $D\rho/Dt = 0$ se obtiene, en la ecuación de continuidad, que el campo de velocidades será solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).

Una posible descomposición para los campos que permite resolver las Ecuaciones (3.2) y (3.4), fue propuesta por Chandrasekhar y Kendall (1957). La misma aprovecha el carácter solenoidal de \mathbf{v} y \mathbf{B} para representarlos mediante una base de *campos de Bernoulli* (también llamados *force-free* por sus implicancias en el caso magnético).

El presente capítulo tendrá por tanto los siguientes objetivos:

- introducir la formulación matemática de la *descomposición de Chandrasekhar - Kendall (C-K)* y obtener explícitamente los elementos de la base para la geometría mencionada;
- deducir ecuaciones para la evolución temporal de los coeficientes de expansión en la base C-K;
- precisar el esquema numérico utilizado en Mininni et al. (2007) para solucionar dichas ecuaciones como así también mencionar algunos detalles sobre su implementación.

3.1. Descomposición de Chandrasekhar-Kendall

3.1.1. Campos force-free lineales

Dado que la fuerza de Lorentz está determinada por el producto vectorial del campo magnético con su propio rotor, resulta interesante estudiar bajo qué condiciones este término se anula (obviando la solución trivial de \mathbf{B} homogéneo). Esto implicará resolver el sistema de ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{B} = f(\mathbf{r})\mathbf{B}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.6)$$

donde la segunda ecuación es necesaria para asegurar $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Este tipo de campos se llaman de Bernoulli o force-free¹. Sin embargo, no existe una solución analítica general para la Ecuación (3.5), por lo que es usual restringir el problema a un campo force-free lineal, es decir $f(\mathbf{r}) = k$, con k constante, obteniendo

$$\nabla \times \mathbf{B} = k\mathbf{B}. \quad (3.7)$$

En este último caso se verifica automáticamente la Ecuación (3.6). Aplicando el operador rotor a ambos miembros y usando la relación vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, y considerando que el campo \mathbf{B} es solenoidal, se arriba a una ecuación de Helmholtz vectorial para \mathbf{B} ,

$$\nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

¹La traducción literal de force-free al español es *libre de fuerza*.

Esta ecuación ha sido largamente estudiada y se sabe que admite tres familias de soluciones posibles, que llamaremos \mathbf{L} , \mathbf{T} y \mathbf{S} . Las mismas pueden obtenerse como

$$\mathbf{L} = \nabla \psi, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{T} = \kappa \nabla \times \psi \mathbf{r}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{S} = \nabla \times (\nabla \times \psi \mathbf{r}), \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} es el vector posición y ψ es una función que satisface la ecuación de Helmholtz escalar

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0. \quad (3.12)$$

Puede mostrarse además que se verifica

$$\nabla \times \mathbf{S} = \kappa \mathbf{T}, \quad (3.13)$$

y por tanto

$$\nabla \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \kappa (\mathbf{T} + \mathbf{S}). \quad (3.14)$$

La solución general a la Ecuación (3.7) será entonces $\mathbf{T} + \mathbf{S}$ dado que \mathbf{L} es solución sólo para $\kappa = 0$ (ya que $\nabla \times \nabla \psi = \mathbf{0}$).

Si se consideran coordenadas esféricas (r, θ, φ) , las soluciones a la Ecuación (3.12) vienen dadas por

$$\psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \psi_{\ell m}, \quad (3.15)$$

$$\psi_{\ell m} = C_{\ell m} j_{\ell}(\kappa r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) + C'_{\ell m} y_{\ell}(\kappa r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi), \quad (3.16)$$

donde $C_{\ell m}$ y $C'_{\ell m}$ son constantes, j_{ℓ} e y_{ℓ} son las funciones de Bessel esféricas de primer y segunda especie respectivamente (éstas últimas también llamadas de Neumann) de ℓ -ésimo orden, y Y_{ℓ}^m es el armónico esférico de grado ℓ y orden m . Sin embargo, dado que $\nabla \times \psi_{00} \mathbf{r} = \mathbf{0}$, la suma (3.15) comienza en $\ell = 1$ tanto para \mathbf{T} como para \mathbf{S} . Con esto queda resuelto el problema de encontrar un campo force-free lineal dada la constante de proporcionalidad entre el campo y su rotor.

3.1.2. Expansión de \mathbf{v} y \mathbf{B} en autofunciones de Chandrasekhar-Kendall

Si se considera el conjunto de todos los campos de Bernoulli lineales (\mathfrak{C}) en un dado sistema de coordenadas, el mismo puede representarse como

$$\mathfrak{C} = \{ \mathfrak{C}_i \mid \nabla \times \mathfrak{C}_i = \kappa_i \mathfrak{C}_i \}. \quad (3.17)$$

\mathfrak{C}_i se denomina i -ésima autofunción de Chandrasekhar-Kendall. Vale resaltar que el conjunto \mathfrak{C} no es cerrado bajo la operación de adición, es decir, en general $(\mathfrak{C}_i + \mathfrak{C}_j) \notin \mathfrak{C}$.

Si se consideran coordenadas esféricas, \mathfrak{E} quedará descripto por 3 índices: q , ℓ y m (ver más abajo por qué resulta necesario el índice q) y satisfará:

$$\nabla \times \mathfrak{E}_{q\ell m} = k_{q\ell} \mathfrak{E}_{q\ell m}. \quad (3.18)$$

Para obtener los vectores $\mathfrak{E}_{q\ell m}$ se sigue un procedimiento muy similar al desarrollado en el [Sección 3.1.1](#) y puede mostrarse que, nuevamente, los mismos verifican

$$\mathfrak{E}_{q\ell m} = k_{q\ell} (\nabla \times \psi_{q\ell m} \hat{\mathbf{r}}) + \nabla \times (\nabla \times \psi_{q\ell m} \hat{\mathbf{r}}), \quad (3.19)$$

con

$$\psi_{q\ell m} = C_{q\ell} j_\ell(|k_{q\ell}|r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) + C'_{q\ell} y_\ell(|k_{q\ell}|r) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (3.20)$$

$k_{q\ell}$ se obtiene a partir de las condiciones de contorno y verifica $k_{-q\ell} = -k_{q\ell}$. $C_{q\ell}$ y $C'_{q\ell}$ son constantes de normalización que se obtienen exigiendo la ortonormalidad entre autofunciones diferentes, es decir, proponiendo que se verifique

$$\int_V \mathfrak{E}_{q\ell m} \cdot \mathfrak{E}_{q'\ell'm'}^* dV = \delta_{qq'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (3.21)$$

donde V es el dominio del problema y $*$ denota la operación de conjugación.

El conjunto \mathfrak{E} constituye una base ortonormal del espacio vectorial formado por todos los campos vectoriales reales y solenoidales que posean flujo nulo a través de la frontera del problema de interés. Una descripción completa de dicho teorema puede hallarse en Yoshida et al. (1990), junto con una justificación de por qué, en dichas condiciones, el conjunto $k_{q\ell}$ resulta numerable. Utilizando dicho teorema, es posible escribir un campo vectorial \mathbf{A} , siempre que éste verifique las hipótesis previamente mencionadas, como

$$\mathbf{A} = \sum_{\substack{q=-\infty \\ q \neq 0}}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \xi_{q\ell m} \mathfrak{E}_{q\ell m}. \quad (3.22)$$

Su rotor resulta

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sum_{q\ell m} k_{q\ell} \xi_{q\ell m} \mathfrak{E}_{q\ell m}, \quad (3.23)$$

donde para mayor brevedad se han omitido (y se obviarán de aquí en adelante) los límites de las sumas, idénticos a los de la [Ecuación \(3.22\)](#).

Los coeficientes $\xi_{q\ell m}$ son, en general, complejos. Sin embargo, si el campo \mathbf{A} es real, debe verificarse la relación

$$\xi_{q\ell-m} = (-1)^m \xi_{q\ell m}^*. \quad (3.24)$$

En base a lo mostrado anteriormente, durante el resto del trabajo se utilizará una descomposición de Chandrasekhar-Kendall para representar a los campos vectoriales de interés, \mathbf{v} y \mathbf{B} , resultando

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{q\ell m} \xi_{q\ell m}^v(t) \mathfrak{E}_{q\ell m}(\mathbf{r}), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{q\ell m} \xi_{q\ell m}^B(t) \mathfrak{E}_{q\ell m}(\mathbf{r}). \quad (3.26)$$

Esto implica que la densidad de corriente \mathbf{J} y la vorticidad \mathbf{w} pueden escribirse como

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \sum_{q\ell m} \kappa_{q\ell} \xi_{q\ell m}^v(t) \mathfrak{E}_{q\ell m}(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{q\ell m} \kappa_{q\ell} \xi_{q\ell m}^B(t) \mathfrak{E}_{q\ell m}(\mathbf{r}). \quad (3.28)$$

3.1.3. Condiciones de contorno

El código mencionado al comienzo del capítulo, y que se empleará en la presente tesis, incluye al origen de coordenadas en su dominio. Por consiguiente, $\psi_{q\ell m}$ no contendrá los términos que posean funciones de Neumann (y_ℓ), puesto que estas divergen para $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Se obtiene entonces

$$\psi_{q\ell m} = C_{q\ell} j_\ell(|\kappa_{q\ell}|r) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (3.29)$$

y puede mostrarse que en este caso la constante $C_{q\ell}$ resulta

$$C_{q\ell} = \frac{1}{|\kappa_{q\ell} j_{\ell+1}(|\kappa_{q\ell}|R)|} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)R^3}}, \quad (3.30)$$

donde R es el radio de la esfera considerada.

Las condiciones de contorno consideradas son $B_r|_R = J_r|_R = 0$ y $v_r|_R = w_r|_R = 0$. La primera de ellas representa una frontera formada por una fina capa de material aislante ($J_r|_R = 0$) rodeada por un conductor perfecto ($B_r|_R = 0$). En el caso de \mathbf{v} la restricción implica un flujo de materia hacia el exterior nulo. $w_r|_R = 0$ es una condición necesaria (aunque no suficiente) para garantizar la ausencia de deslizamiento entre la frontera y una capa de fluido inmediatamente adyacente a ésta.

Por otra parte, dado que las funciones $\mathfrak{E}_{q\ell m}$ deben formar una base para cualquier campo vectorial con las características previamente descriptas, las condiciones de contorno se reducen a la restricción

$$j_\ell(|\kappa_{q\ell}|R) = 0. \quad (3.31)$$

$\kappa_{q\ell}$ resulta, por tanto, la q -ésima raíz de la función de Bessel esférica de ℓ -ésimo orden².

En el [Apéndice A](#) se detallan las gráficas de algunos modos C-K. Las mismas se obtuvieron utilizando las condiciones de contorno y de normalización previamente descriptas.

3.2. Ecuaciones diferenciales para la evolución temporal de los coeficientes ξ^v y ξ^B

Para utilizar la descomposición C-K en problemas de dínamo resta encontrar un conjunto de ecuaciones para la variación temporal de ξ^v y ξ^B . El mismo se obtiene,

²Podría pensarse entonces, en un sentido laxo, que $\kappa_{q\ell}$ cumple un rol similar al número de onda k en una descomposición de Fourier.

naturalmente, de las Ecuaciones (3.2) y (3.4) y se mostrará en la presente sección. Para ello se asumirá que el campo \mathbf{f} admite una representación de la forma

$$\mathbf{f} = \sum_{q\ell m} \xi_{q\ell m}^f \mathfrak{E}_{q\ell m}. \quad (3.32)$$

En primer lugar, resulta de utilidad reescribir la Ecuación (3.2) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \mathbf{B} \times \mathbf{J} - \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} \right) - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (3.33)$$

donde se hizo uso de la relación vectorial $\nabla (A^2) = 2(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} + 2\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ y de $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{J}$. Si se reemplazan las Ecuaciones (3.25)–(3.28) y (3.32) en la Ecuación (3.33) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_i \xi_i^v \mathfrak{E}_i &= \sum_i \xi_i^v \mathfrak{E}_i \times \sum_j \kappa_j \xi_j^v \mathfrak{E}_j - \sum_i \xi_i^B \mathfrak{E}_i \times \sum_j \kappa_j \xi_j^B \mathfrak{E}_j - \\ &\quad - \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} \right) - 2\mathbf{\Omega} \times \sum_i \xi_i^v \mathfrak{E}_i + \nu \nabla^2 \sum_i \xi_i^v \mathfrak{E}_i + \\ &\quad + \sum_i \xi_i^f \mathfrak{E}_i, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde se introdujeron los índices $i = (q', \ell', m')$ y $j = (q'', \ell'', m'')$ a fines de disponer de una notación más compacta para las mencionadas ternas. Intercambiando las sumas con los operadores diferenciales, utilizando la propiedad $\nabla^2 \mathfrak{E}_i = -\nabla \times (\nabla \times \mathfrak{E}_i) = -\kappa_i^2 \mathfrak{E}_i$ (válida por ser \mathfrak{E}_i de divergencia nula) y agrupando las sumatorias en los dos primeros términos, es posible reescribir la Ecuación (3.34) como

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{d\xi_i^v}{dt} \mathfrak{E}_i &= \sum_i \sum_j \kappa_j \xi_i^v \xi_j^v \mathfrak{E}_i \times \mathfrak{E}_j - \sum_i \sum_j \kappa_j \xi_i^B \xi_j^B \mathfrak{E}_i \times \mathfrak{E}_j - \\ &\quad - \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} \right) - 2\mathbf{\Omega} \times \sum_i \xi_i^v \mathfrak{E}_i - \nu \sum_i \kappa_i^2 \xi_i^v \mathfrak{E}_i + \\ &\quad + \sum_i \xi_i^f \mathfrak{E}_i. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Llamando $n = (q, \ell, m)$, multiplicando a izquierda ambos miembros por \mathfrak{E}_n^* e integrando sobre todo el dominio resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i^v}{dt} \delta_{in} &= \sum_i \sum_j \kappa_j \xi_i^v \xi_j^v I_{ij}^n - \sum_i \sum_j \kappa_j \xi_i^B \xi_j^B I_{ij}^n - \int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} \right) dV - \\ &\quad - 2 \int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \sum_i \xi_i^v \mathfrak{E}_i \right) dV - \nu \sum_i \kappa_i^2 \xi_i^v \delta_{in} + \sum_i \xi_i^f \delta_{in}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde se utilizó la relación de ortogonalidad $\int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot \mathfrak{E}_i = \delta_{in}$ y se llamó I_{ij}^n a la cantidad $\int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot (\mathfrak{E}_i \times \mathfrak{E}_j) dV$. Si se realiza permutación cíclica en el producto mixto del término de Coriolis y se introduce $O_i^n = \int_V \mathfrak{E}_n^* \times \mathfrak{E}_i dV$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n^v}{dt} = & \sum_i \sum_j \kappa_j I_{ij}^n \left(\xi_i^v \xi_j^v - \xi_i^B \xi_j^B \right) - \underbrace{\int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot \nabla \left(\mathcal{P} + \frac{v^2}{2} \right) dV}_{\textcircled{1}} + \\ & + 2 \sum_i \xi_i^v \Omega \cdot O_i^n - \nu \kappa_n^2 \xi_n^v + \xi_n^f. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para verificar que el término $\textcircled{1}$ de la Ecuación (3.37) se anula es conveniente llamar ψ a $\mathcal{P} + v^2/2$. Resulta entonces $\nabla \cdot (\psi \mathfrak{E}_n^*) = \psi \nabla \cdot \mathfrak{E}_n^* + \mathfrak{E}_n^* \cdot \nabla \psi$, que por ser \mathfrak{E}_n^* de divergencia nula permite escribir

$$\int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot \nabla \psi dV = \int_V \nabla \cdot (\mathfrak{E}_n^* \psi) dV = \oint_S \psi \mathfrak{E}_n^* \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.38)$$

donde se utilizó el teorema de Gauss; S es la frontera del dominio simplemente conexo V . Por tratarse V de una esfera, $d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{r}}$, resultando $\mathfrak{E}_n^* \cdot d\mathbf{S} = [\mathfrak{E}_n^*]_r dS$ ($[\mathfrak{E}_n^*]_r$ denota la componente radial de \mathfrak{E}_n^*). Esta última cantidad se anula ya que por las condiciones de contorno $[\mathfrak{E}_n^*]_r = 0$.

Una ecuación para $\frac{d\xi_n^B}{dt}$ puede obtenerse a partir de la Ecuación (3.4) o, en forma más simple, de su equivalente para el potencial vector del campo magnético ($\mathbf{A} | \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$). Con ello queda determinado el sistema de ecuaciones dinámicas para los coeficientes ξ^v y ξ^B :

$$\frac{d\xi_n^v}{dt} = \sum_{i,j} \kappa_j I_{ij}^n \left(\xi_i^v \xi_j^v - \xi_i^B \xi_j^B \right) + 2 \sum_i \xi_i^v \Omega \cdot O_i^n - \nu \kappa_n^2 \xi_n^v + \xi_n^f, \quad (3.39)$$

$$\frac{d\xi_n^B}{dt} = \sum_{i,j} \kappa_n I_{ij}^n \xi_i^v \xi_j^B - \eta \kappa_n^2 \xi_n^B, \quad (3.40)$$

$$I_{ij}^n = \int_V \mathfrak{E}_n^* \cdot (\mathfrak{E}_i \times \mathfrak{E}_j) dV, \quad (3.41)$$

$$O_i^n = \int_V \mathfrak{E}_n^* \times \mathfrak{E}_i dV. \quad (3.42)$$

La descomposición empleada permite resolver las ecuaciones dinámica y de inducción de manera puramente espectral y posee la virtud de transformar un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) en uno de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

3.3. Cantidades cuadráticas y momento dipolar magnético en función de los coeficientes ξ^v y ξ^B

A partir de la descomposición propuesta en las Ecuaciones (3.25)–(3.28) resulta bastante simple calcular las cantidades cuadráticas invariantes del problema MHD ideal (Ecuaciones 2.40–2.42), como así también la helicidad cinemática (Ecuación 2.43). Las mismas se expresan en términos de los coeficientes ξ^v y ξ^B cómo:

$$E^{\text{cin}} + E^{\text{mag}} = E^{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_i |\xi_i^v|^2 + \frac{1}{2} \sum_i |\xi_i^B|^2, \quad (3.43)$$

$$H^{\text{cin}} = \sum_i \kappa_i |\xi_i^v|^2, \quad (3.44)$$

$$H^{\text{mag}} = \sum_i \frac{|\xi_i^B|^2}{\kappa_i}, \quad (3.45)$$

$$H^{\text{cruz}} = \sum_i \xi_i^v \xi_i^{B*}. \quad (3.46)$$

Por otra parte, puede mostrarse que el momento dipolar magnético depende sólo de los coeficientes $\xi_{q,1,m}$ y el mismo puede obtenerse como

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} \, dV \\ &= 2R^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sum_q C_{q,1} |\kappa_{q,1}| j'_1(|\kappa_{q,1}|R) \left[\sqrt{2} \operatorname{Re}(\xi_{q,1,1}^B) \hat{\mathbf{x}} - \sqrt{2} \operatorname{Im}(\xi_{q,1,1}^B) \hat{\mathbf{y}} - \xi_{q,1,0}^B \hat{\mathbf{z}} \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde j'_1 es la derivada de la función esférica de Bessel de primer orden y se utilizaron comas para separar los valores de los índices q , ℓ y m .

3.4. Resolución numérica

El código mencionado al principio de este capítulo resuelve numéricamente las Ecuaciones (3.39)–(3.42) para una esfera de radio $R = 1$. El mismo utiliza una aproximación de tipo Galerkin para reducir a un número finito la cantidad de coeficientes de expansión. En consecuencia, como primer paso es necesario escoger resolución espectral $q_{\text{máx}}$ y $\ell_{\text{máx}}$ (con lo cual quedan limitados también los valores posibles de m).

Luego el código computa los autovalores $\kappa_{q\ell}$ mediante un algoritmo mixto que emplea bisección y Newton-Raphson y evalúa las constantes de normalización $C_{q\ell}$ utilizando la Ecuación (3.30). Los resultados de estas operaciones se guardan en archivos binarios para su posterior utilización.

A continuación se realiza el cálculo de los arreglos de acople I_{ij}^n y \mathbf{O}_i^n , lo que representa la tarea más compleja del programa. En coordenadas esféricas, la integral de

la Ecuación (3.41) puede separarse en tres, una para cada dirección. En $\hat{\phi}$ la misma se computa sólo para $m_i + m_j = m_n$ (dónde m_i , m_j y m_n denotan los índices m correspondientes a las terna i , j y n , respectivamente), ya que es cero en caso contrario. Tanto en \hat{r} como en $\hat{\theta}$ el problema se reduce a siete integrales. Las mismas involucran tres funciones de Bessel esféricas y sus derivadas en la dirección radial y tres funciones de Legendre y sus derivadas para el ángulo polar. Se utilizan cuadraturas de Gauss-Legendre y Gauss-Jacobi para computar las integrales en \hat{r} y $\hat{\theta}$, respectivamente, ambas con doble precisión.

Para el cálculo de \mathbf{O}_i^n también hay varias simetrías que pueden ser explotadas para ahorrar memoria. En particular, si se proyecta \mathbf{O}_i^n sobre una terna cartesiana, el mismo queda descompuesto en tres arreglos: \mathbf{Xs}_i^n , \mathbf{Xr}_i^n y \mathbf{Z}_i^n . Estos verifican $\mathbf{Xs}_i^n \neq 0$ sólo para $m_i = m_n + 1$, $\mathbf{Xr}_i^n \neq 0$ sólo para $m_i = m_n - 1$, $\mathbf{Z}_i^n \neq 0$ sólo para $m_i = m_n$. Haciendo uso de la mencionada descomposición, el término de Coriolis de la Ecuación (3.39) queda descripto por

$$2 \sum_i \xi_i^v \left[(\Omega_x + i\Omega_y) \mathbf{Xs}_i^n + (\Omega_x - i\Omega_y) \mathbf{Xr}_i^n + \Omega_z \mathbf{Z}_i^n \right]. \quad (3.48)$$

Para el cálculo de \mathbf{Xs}_i^n , \mathbf{Xr}_i^n y \mathbf{Z}_i^n el código utiliza cuadraturas de Gauss-Legendre, tanto para la parte radial como angular.

Los arreglos I_{ij}^n y \mathbf{O}_i^n (o, en rigor, \mathbf{Xs}_i^n , \mathbf{Xr}_i^n y \mathbf{Z}_i^n) se almacenan en paralelo como archivos MPI, como consecuencia del gran tamaño de los mismos. A modo de ejemplo, con una resolución de $q_{\text{máx}} = \ell_{\text{máx}} = 9$, el almacenamiento de estas tablas requiere 4,2 GB.

Finalmente se evolucionan temporalmente los coeficientes $\xi_{q\ell m}$ utilizando un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden.

El código está implementado en Fortran 90 y paralelizado utilizando MPI. El esquema de paralelización utilizado consiste en distribuir sólo una porción de los arreglos de acople I_{ij}^n y \mathbf{O}_i^n a cada proceso. Dicho particionado se realiza sólo en el índice q si la cantidad de procesos es menor a $2q$ y en q , ℓ y m en el caso contrario. Luego, cada instancia del programa computa independientemente las sumas de las Ecuaciones (3.39) y (3.40) y a continuación se sincronizan los coeficientes de expansión ξ entre todos los procesos. Este esquema requiere una mínima comunicación entre las diferentes instancias, por lo que el escalado del tiempo de ejecución con respecto a la cantidad de procesadores resulta aproximadamente ideal.

Como producto final, el código genera archivos de tres tipos: cantidades globales, espectros y campos. Los primeros incluyen el cálculo de las cantidades detalladas en las Ecuaciones (3.43)–(3.47) junto con las enstrofías cinética y magnética (estas últimas cantidades no se utilizarán en este trabajo). Las salidas espectrales proveen, tanto para \mathbf{v} como para \mathbf{B} , la distribución de energía y helicidad para cada valor de ℓ (espectro en ℓ) y para cada valor de $|\ell|$, estos últimos agrupados en compartimientos de longitud $\text{máx}\{\ell_{q\ell}\}/q_{\text{máx}}$ (espectro en q , consultar Mininni et al. 2006, pág. 6 para más detalles). Las salidas asociadas a los campos son un conjunto de archivos binarios que almacenan los coeficientes de expansión y la representación de \mathbf{v} y \mathbf{B} en coordenadas cartesianas. Estos permiten reanudar el programa en caso de interrupción y posibilitan la visualización de

los campos. Todos los archivos se generan luego de transcurridos n pasos temporales, donde n es un entero positivo y se ajusta a priori para cada tipo de salida: global, espectral o binaria (ordenadas por costo computacional).

Referencias

- Braginsky, Stanislav I. et al. (1995). «Equations governing convection in earth's core and the geodynamo». En: *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 79.1, págs. 1-97. ISSN: 0309-1929. DOI: [10.1080/03091929508228992](https://doi.org/10.1080/03091929508228992). URL: http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-data_query?bibcode=1995GApFD..79....1B%7B%5C%7Dlink_type=ABSTRACT.
- Chandrasekhar, Subramanyan y Paul C. Kendall (1957). «On force-free magnetic fields». En: *Astrophys. J.* 126.2, págs. 457-460. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/146413](https://doi.org/10.1086/146413).
- Mininni, Pablo D. et al. (2006). «Magnetohydrodynamic activity inside a sphere». En: *Phys. Fluids* 18.11, págs. 1-13. ISSN: 10706631. DOI: [10.1063/1.2393438](https://doi.org/10.1063/1.2393438). arXiv: [0602147v2 \[arXiv:physics\]](https://arxiv.org/abs/physics/0602147v2).
- Mininni, Pablo D. et al. (2007). «Hydrodynamic and magnetohydrodynamic computations inside a rotating sphere». En: *New J. Phys.* 9.8, págs. 303-303. ISSN: 1367-2630. DOI: [10.1088/1367-2630/9/8/303](https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/8/303). arXiv: [0702082 \[physics\]](https://arxiv.org/abs/physics/0702082). URL: <http://arxiv.org/abs/physics/0702082>.
- Olson, Peter et al. (2007). *Core Dynamics*. Ed. por Peter Olson et al. 1.^a ed. Vol. 8. Elsevier.
- Yoshida, Zensho (1991). «Discrete Eigenstates of Plasmas Described by the Chandrasekhar-Kendall Functions». En: *Prog. Theor. Phys.* 86.1, págs. 45-55. ISSN: 0033-068X, 1347-4081. DOI: [10.1143/ptp/86.1.45](https://doi.org/10.1143/ptp/86.1.45). URL: <http://ptp.oxfordjournals.org/content/86/1/45.full.pdf>.
- Yoshida, Zensho et al. (1990). «Remarks on spectra of operator rot». En: *Math. Zeitschrift* 204.1, págs. 235-245. ISSN: 00255874. DOI: [10.1007/BF02570870](https://doi.org/10.1007/BF02570870).

CAPÍTULO 4

Metodología

Para afrontar los objetivos mencionados en la [Introducción](#) se realizaron simulaciones numéricas directas, utilizando la descomposición detallada en el [Capítulo 3](#) y el código Fortran allí también mencionado.

Todas las simulaciones utilizaron una resolución espacial de $q_{\text{máx}} = \ell_{\text{máx}} = 9$ (1944 coeficientes de expansión) y un paso temporal de 1×10^{-3} (en unidades alfvénicas). Este último se escogió idéntico para los dos tipos de simulaciones buscando la uniformidad metodológica entre ambos estudios. Los datos de energía, helicidad y del momento dipolar magnético se almacenaron cada 10 iteraciones ($\Delta t_{\text{datos}} = 1 \times 10^{-2}$). La totalidad de las simulaciones constaron de 200.000 pasos temporales ($t_f = 200$).

Los parámetros que identificaron a cada simulación fueron las difusividades cinética y magnética, y la intensidad de la velocidad angular (en todos los casos $\Omega = \Omega_0 \hat{\mathbf{z}}$). El esquema mediante el cual se muestreó el espacio de configuración fue puramente ad-hoc, basado en prueba y error. La estrategia para ello fue introducir pequeñas variaciones partiendo de un modelo de referencia que produjese una dinámica adecuada (i.e. un campo magnético sustentable en el tiempo). Un resumen de las simulaciones y los parámetros empleados puede encontrarse en el [Cuadro 4.1](#).

Las simulaciones de dínamo de pequeña escala utilizaron, en todos los casos, una descomposición $\xi_{q\ell m}^f = 1, \forall q, \ell, m$ para el forzado ([Figura 4.1](#)). Las condiciones iniciales fueron

$$\begin{aligned} \xi_{\pm 330}^v \Big|_{t=0} &= -1, \\ \xi_{\pm 33m}^v \Big|_{t=0} &= 1 + i & m > 0, \\ \xi_{q\ell m}^v \Big|_{t=0} &= 0 & q \neq \pm 3, \ell \neq 3, \end{aligned}$$

ID	ν	η	Ω_0
S00	0,01	0,01	16
S01	0,001	0,001	16
S02	0,001	0,01	16
S03	0,01	0,001	16
S04	0,01	0,01	32
S05	0,01	0,01	4
S06	0,01	0,01	0,16

(a) Simulaciones de dínamo de pequeña escala.

ID	ν	η	Ω_0
D00	0,002	0,002	16
D01	0,005	0,005	16
D02	0,01	0,01	16
D03	0,002	0,002	64
D04	0,002	0,002	500

(b) Simulaciones de dínamo mayormente dipolar.

Cuadro 4.1: Resumen de los parámetros de entrada que caracterizaron a cada simulación junto con su denominación (ID). En cada tabla, la primer simulación (sufijo 00) es la que se utilizó como referencia.

en el caso del campo de velocidades y

$$\begin{aligned}
 \xi_{\pm 330}^B \Big|_{t=0} &= 1, \\
 \xi_{\pm 33m}^B \Big|_{t=0} &= 1 - i & m > 0, \\
 \xi_{q\ell m}^B \Big|_{t=0} &= 0 & q \neq \pm 3, \ell \neq 3,
 \end{aligned}$$

para el campo magnético, y se escogieron con el objetivo de que los campos comenzaran distribuidos en una escala intermedia pero con una topología compleja.

Para analizar la situación de dínamo dipolar se realizaron primeramente simulaciones hidrodinámicas (i.e. $\mathbf{B} = \mathbf{0}$) con disipación hasta encontrar un forzado que produjese un campo de velocidades con tres escalas espaciales bien diferenciadas: integral, inercial y difusiva. Además se procuró la inyección de helicidad cinemática en la escala inercial para favorecer la intensidad del *efecto* α (P. Roberts et al. 2000, págs. 1096-1097). Esto último se logró mediante la ausencia de simetría entre los términos de q positivo y q negativo en el forzado, resultando su descomposición

$$\begin{aligned}
 \xi_{330}^f &= f_0, \\
 \xi_{33m}^f &= f_0(1 - i) & m > 0, \\
 \xi_{q\ell m} &= 0 & q \neq 3, \ell \neq 3,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

y donde se escogió $f_0 = 3,5$ para normalizar (en forma aproximada) la energía cinética total de la simulación hidrodinámica de referencia (realizada con $\nu = 1 \times 10^{-2}$). Vale mencionar que esta descomposición no produce un forzado axialmente simétrico (Figura 4.1), dificultando la interpretación de los resultados. Si bien se realizaron simulaciones exigiendo simetría acimutal para \mathbf{f} y utilizando un campo de velocidades turbulento como condición inicial, dicha configuración produjo un decaimiento monótono en la intensidad de \mathbf{B} , por lo que no se presentarán en este trabajo. Bajo las condiciones indicadas

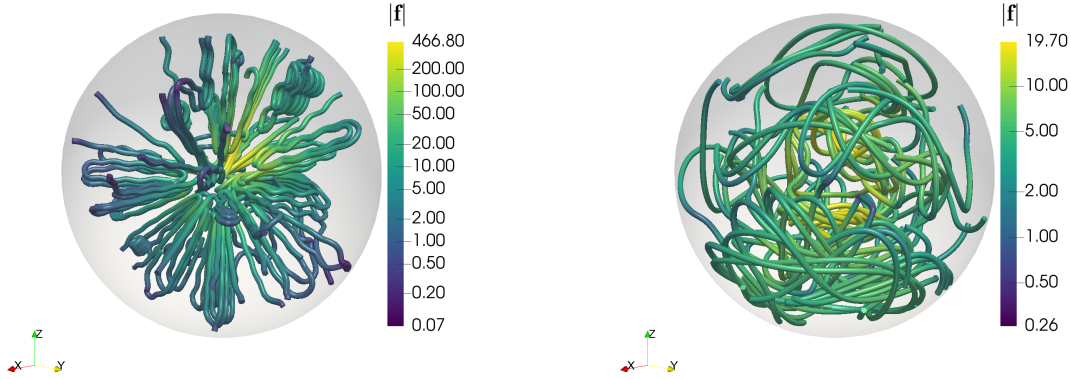


Figura 4.1: Líneas de campo para el forzado utilizado en las simulaciones de dínamos de pequeña escala (izquierda) y de dínamos mayormente dipolares (derecha). Se utilizó la intensidad del campo f respectivo para colorear las líneas de campo.

en las [Ecuación \(4.1\)](#), se obtuvo el espectro espacial en k para el campo de velocidades indicado en la [Figura 4.2](#).

Una vez logrado un campo v aceptable, se utilizó el mismo como condición inicial para todas las simulaciones magnetohidrodinámicas de dínamo dipolar. Los valores de B para $t = 0$ coincidieron funcionalmente con los utilizados en las corridas de dínamo de pequeña escala, difiriendo sólo en un factor constante. Éste último permitió ajustar la energía magnética inicial, procurando simular también el régimen de dínamo cinemático.

Para establecer si los dínamos obtenidos resultaban efectivamente dipolares se graficó la energía del campo magnético para cada valor de ℓ , $E_\ell^{\text{mag}} = \sum |\xi_{q\ell m}^B|^2$, donde la suma se realiza sobre q y m . Luego, se caracterizó como dipolares a aquellos dínamos en los que E_1^{mag} (asociada al momento dipolar magnético — [Ecuación 3.47](#) —) resultó predominante. Para complementar este criterio se utilizaron también gráficas de las líneas de campo.

Finalmente, para analizar el comportamiento de la serie temporal de m se generaron gráficos en dos dominios: tiempo y frecuencia. Con el objetivo de obtener curvas que permitieran la comparación directa entre diferentes simulaciones, se normalizó el momento dipolar magnético, es decir, se utilizó la variable $m/|m|$.

La representación temporal permitió observar la polaridad del campo magnético y, en consecuencia, la presencia de reversiones y el período asociado a ellas. Con el uso de gráficos en el dominio de la frecuencia se buscó analizar la presencia de ruido $1/f$. Para este fin se empleó la variable $f|\mathcal{F}\{m_z/|m|\}|$ (es decir, el espectro de potencias escalado por la frecuencia) ya que dicha cantidad, en las zonas donde $|\mathcal{F}\{m_z/|m|\}| \approx 1/f$, se comporta como una recta de pendiente nula. Utilizando el estimador no-paramétrico LOWESS ([Cleveland 1979](#)), se trazaron también curvas del espectro temporal suavizado utilizando. Estas últimas, que a bajas frecuencias mostraron errores debido a la baja densidad de

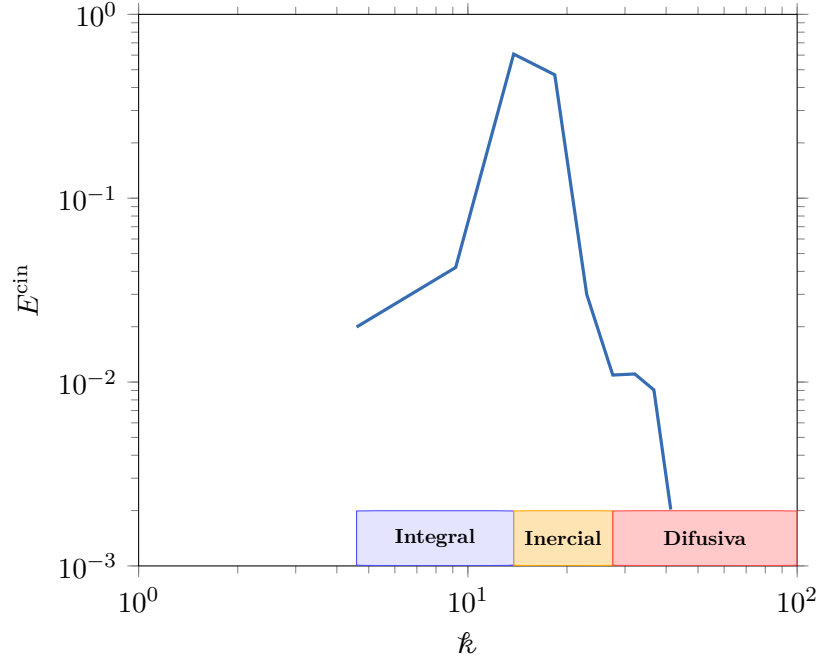


Figura 4.2: Espectro espacial para el campo de velocidades de la corrida hidrodinámica de referencia. En la parte inferior se colocó una leyenda indicando las tres zonas con comportamientos cualitativamente diferentes.

datos, permitieron analizar mejor el comportamiento en la parte alta del espectro.

Todas las simulaciones se repartieron entre los clústers de cómputo *Sakura*¹ y *Seminare*², y se realizaron utilizando 24 núcleos. Bajo dichas condiciones, cada caso analizado precisó, en forma aproximada, unas 680 horas máquina.

El post-proceso se llevó a cabo utilizando archivos de órdenes (scripts) desarrollados específicamente para este trabajo. Los mismos se escribieron en lenguaje *Python 3*³ y los algoritmos numéricos utilizados fueron los incluidos en el popular paquete *NumPy*⁴, a excepción del suavizado del espectro temporal, que utilizó el módulo *StatsModels*⁵ (específicamente su implementación del algoritmo LOWESS). Todos los gráficos se realizaron utilizando la biblioteca *Matplotlib*⁶.

¹*Sakura* pertenece al Grupo de Flujos Astrofísicos del Departamento de Física de la Universidad de Buenos Aires.

²*Seminare* pertenece a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata.

³Versión 3.5, disponible en www.python.org/downloads/release/python-350/.

⁴Versión 1.12, disponible en <https://github.com/numpy/numpy/tree/maintenance/1.12.x>.

⁵Versión 0.6, disponible en <https://github.com/statsmodels/statsmodels/releases/tag/v0.6.1>.

⁶Versión 1.5, disponible en <https://github.com/matplotlib/matplotlib/tree/v1.5.3>.

Referencias

- Cleveland, William S. (1979). «Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots». En: *J. Am. Stat. Assoc.* 74.368, págs. 829-836. ISSN: 01621459. DOI: [10.2307/2286407](https://doi.org/10.2307/2286407). arXiv: [/dx.doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038](https://arxiv.org/abs/10.1080/01621459.1979.10481038) [[http:](http://)]. URL: <http://www.jstor.org/stable/2286407>.
- Roberts, Paul et al. (2000). «Geodynamo theory and simulations». En: *Rev. Mod. Phys.* 72.4, págs. 1081-1123. ISSN: 0034-6861. DOI: [10.1103/RevModPhys.72.1081](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.1081).

CAPÍTULO 5

Resultados

En el presente capítulo se expone, primeramente, una caracterización de cada simulación mediante los promedios temporales de sus energías cinética y magnética; sus helicidad, también cinética y magnética; y sus parámetros adimensionales. A continuación se muestra, para las simulaciones de dínamos de pequeña escala, la distribución de energía magnética para cada valor de ℓ y las series temporal y espectral del momento dipolar magnético. Finalmente se presenta un análisis similar para las simulaciones de dínamos mayormente dipolares.

5.1. Cantidades cuadráticas y parámetros adimensionales

5.1.1. Energías y helicidad

En el [Cuadro 5.1](#) se presentan los promedios temporales para la energía y la helicidad, tanto cinética como magnética. Los mismos se calcularon desde un tiempo t_e en que se alcanzaron valores estadísticamente estacionarios para las diferentes cantidades (fundamentalmente las energías) hasta $t = 200 (t_f)$. Notar que la razón entre la helicidad cinemática (magnética) y la energía cinética (magnética) presentó valores mayores en las simulaciones detalladas en (b).

Asimismo, en las [Figuras 5.1](#) y [5.2](#) se exhiben las series temporales de las energías y helicidad para las simulaciones S00 y D00. Estas últimas fueron escogidas porque representan los parámetros de entrada característicos de cada tipo de dínamo. Las series temporales para las simulaciones restantes no se presentan dado que resultaron muy similares, en su comportamiento, a las aquí mostradas (a S00 las de pequeña escala y a D00 las dipolares, a excepción de D02, detallada más abajo).

En forma acorde a lo esperado, las [Figuras 5.1](#) y [5.2](#) mostraron una tendencia a que las energías cinética y magnética crecieran y decrecieran en contrafase. Por otra parte, la simulación D00 presentó fluctuaciones de períodos mayores a lo esperado y, en consecuencia, su extensión temporal resultó insuficiente para garantizar la estacionariedad estadística. Este último resultado limitó el alcance de las conclusiones para las

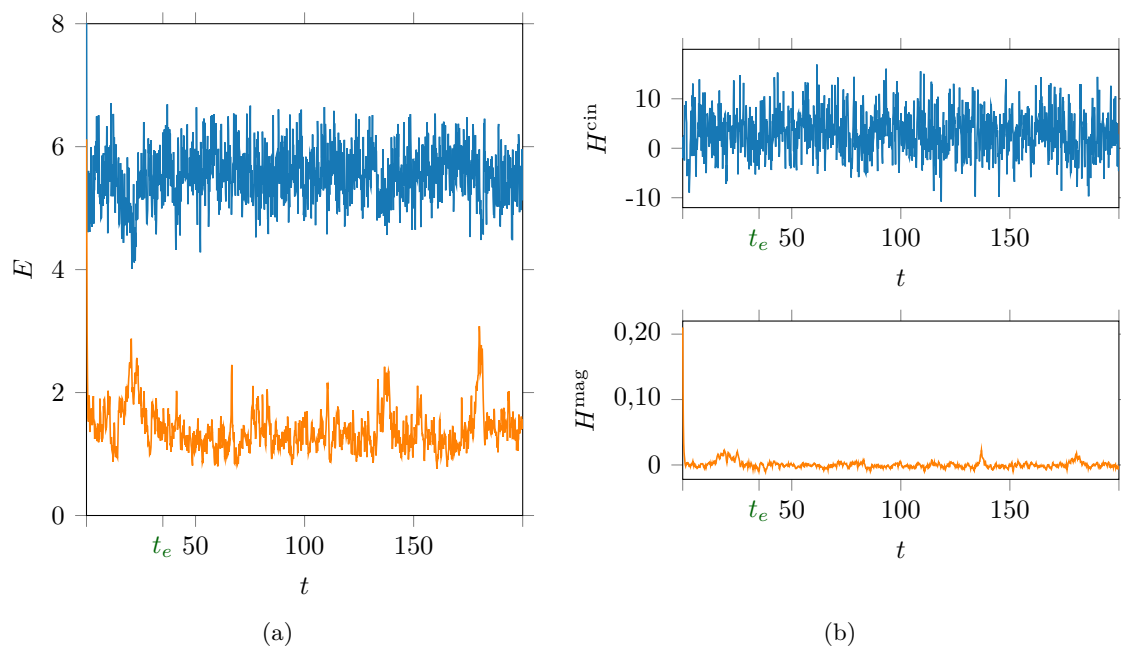


Figura 5.1: (a) Energías cinética (azul) y magnética (naranja). (b) Helicidades cinética (arriba) y magnética (abajo). Todas las gráficas corresponden a la simulación S00. t_e corresponde al tiempo en que se considera a la solución como aproximadamente estacionaria.

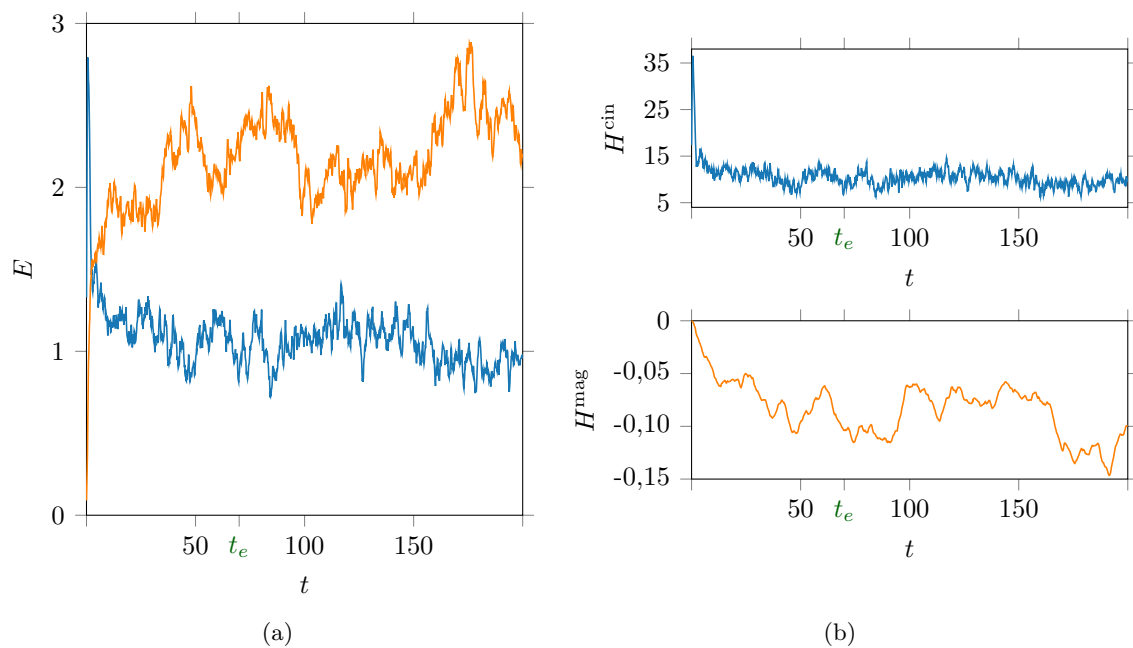


Figura 5.2: (a) Energías cinética (azul) y magnética (naranja). (b) Helicidades cinética (arriba) y magnética (abajo). Todas las gráficas corresponden a la simulación D00. t_e corresponde al tiempo en que se considera a la solución como aproximadamente estacionaria.

ID	\bar{E}^{cin}	\bar{H}^{cin}	\bar{E}^{mag}	\bar{H}^{mag}
S00	$5,55 \cdot 10^0$	$3,10 \cdot 10^0$	$1,37 \cdot 10^0$	$-6,02 \cdot 10^{-4}$
S01	$2,02 \cdot 10^1$	$-1,07 \cdot 10^1$	$1,89 \cdot 10^1$	$6,63 \cdot 10^{-3}$
S02	$1,15 \cdot 10^1$	$-2,06 \cdot 10^1$	$3,25 \cdot 10^0$	$5,33 \cdot 10^{-3}$
S03	$5,67 \cdot 10^0$	$-2,05 \cdot 10^0$	$7,23 \cdot 10^0$	$2,74 \cdot 10^{-2}$
S04	$3,98 \cdot 10^0$	$-3,38 \cdot 10^0$	$1,57 \cdot 10^0$	$5,25 \cdot 10^{-4}$
S05	$7,49 \cdot 10^0$	$2,91 \cdot 10^0$	$9,61 \cdot 10^{-1}$	$-1,44 \cdot 10^{-3}$
S06	$9,20 \cdot 10^0$	$2,38 \cdot 10^0$	$1,42 \cdot 10^0$	$-1,52 \cdot 10^{-3}$

(a) Simulaciones de dínamo de pequeña escala.

ID	\bar{E}^{cin}	\bar{H}^{cin}	\bar{E}^{mag}	\bar{H}^{mag}
D00	$1,04 \cdot 10^0$	$1,01 \cdot 10^1$	$2,25 \cdot 10^0$	$-9,09 \cdot 10^{-2}$
D01	$8,26 \cdot 10^{-1}$	$9,87 \cdot 10^0$	$1,29 \cdot 10^0$	$-8,07 \cdot 10^{-2}$
D02	$6,44 \cdot 10^{-1}$	$7,88 \cdot 10^0$	$7,92 \cdot 10^{-1}$	$-6,20 \cdot 10^{-2}$
D03	$2,72 \cdot 10^{-1}$	$3,24 \cdot 10^0$	$1,35 \cdot 10^0$	$-3,68 \cdot 10^{-2}$
D04	$3,10 \cdot 10^{-1}$	$3,75 \cdot 10^0$	$5,56 \cdot 10^{-1}$	$-1,62 \cdot 10^{-2}$

(b) Simulaciones de dínamo mayormente dipolar.

Cuadro 5.1: Energía cinética, helicidad cinemática, energía magnética y helicidad magnética correspondientes a cada simulación junto con su denominación (ID).

simulaciones de dínamo dipolar.

El caso de D02 (no mostrado) resultó atípico en relación a los demás dínamos dipolares. Por efecto de la alta viscosidad (en comparación a la intensidad del forzado) alcanzó a partir de $t \approx 20$ valores notablemente constantes para las energías y helicidad.

5.1.2. Parámetros adimensionales

En el Cuadro 5.2 se muestran los parámetros adimensionales (definidos en la Sección 2.3.3) obtenidos para cada una de las corridas. Los mismos permitieron realizar una caracterización simplificada de las condiciones dinámicas obtenidas. El valor representativo de la velocidad, necesario para el cálculo de Re , Rm y Ek , se obtuvo como $\mathcal{V} = \sqrt{\bar{E}^{\text{cin}}}$.

La cobertura del espacio de parámetros resultó adecuada para el objetivo propuesto, obteniéndose valores muy similares a los utilizados usualmente en modelos numéricos de geodínamo (Sanchez et al. 2016, pág. 35). Se considera que dichos valores resultan suficientes para reproducir las principales características del campo geomagnético (Christensen et al. 2010), aún cuando distan notablemente de los parámetros del núcleo externo terrestre.

ID	Re	Rm	Ek	Pm
S00	$2,36 \cdot 10^2$	$2,36 \cdot 10^2$	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^0$
S01	$4,50 \cdot 10^3$	$4,50 \cdot 10^3$	$6,25 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^0$
S02	$3,38 \cdot 10^3$	$3,38 \cdot 10^2$	$6,25 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$
S03	$2,38 \cdot 10^2$	$2,38 \cdot 10^3$	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^1$
S04	$1,99 \cdot 10^2$	$1,99 \cdot 10^2$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^0$
S05	$2,74 \cdot 10^2$	$2,74 \cdot 10^2$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^0$
S06	$3,03 \cdot 10^2$	$3,03 \cdot 10^2$	$6,25 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^0$

(a) Simulaciones de dínamo de pequeña escala.

ID	Re	Rm	Ek	Pm
D00	$5,09 \cdot 10^2$	$5,09 \cdot 10^2$	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^0$
D01	$1,82 \cdot 10^2$	$1,82 \cdot 10^2$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^0$
D02	$8,02 \cdot 10^1$	$8,02 \cdot 10^1$	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$1,00 \cdot 10^0$
D03	$2,61 \cdot 10^2$	$2,61 \cdot 10^2$	$3,13 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^0$
D04	$2,78 \cdot 10^2$	$2,78 \cdot 10^2$	$4,00 \cdot 10^{-6}$	$1,00 \cdot 10^0$

(b) Simulaciones de dínamo mayormente dipolar.

Cuadro 5.2: Resumen de los parámetros adimensionales correspondientes a cada simulación junto con su denominación (ID).

5.2. Análisis del campo magnético obtenido para los dínamos de pequeña escala

5.2.1. Energía magnética en función de ℓ

En el caso de dínamo de pequeña escala, al analizar la distribución de energía magnética para los diferentes valores de ℓ se encontró un comportamiento que rápidamente alcanza la estacionalidad estadística. En consecuencia, y para una mejor visualización, en las Figuras 5.4–5.10 se presenta el espectro magnético en función de ℓ sólo hasta $t = 50$.

Al analizar las gráficas mencionadas, se observa que la energía para $\ell = 1$ (asociada al momento dipolar magnético) resultó consistentemente menor a la hallada en los términos de orden superior. Adicionalmente, se aprecia que el intercambio de energía entre las diferentes configuraciones de campo magnético (distintos valores de ℓ) fue mínimo. Esto es un efecto directo de haber forzado al sistema para todos los valores de q , ℓ y m . De

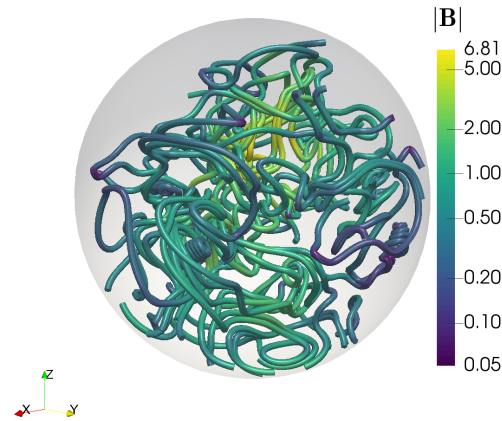


Figura 5.3: Líneas de campo para el campo magnético \mathbf{B} de la simulación S00 a $t = 178$. Se utilizó la intensidad de \mathbf{B} para colorear las mismas.

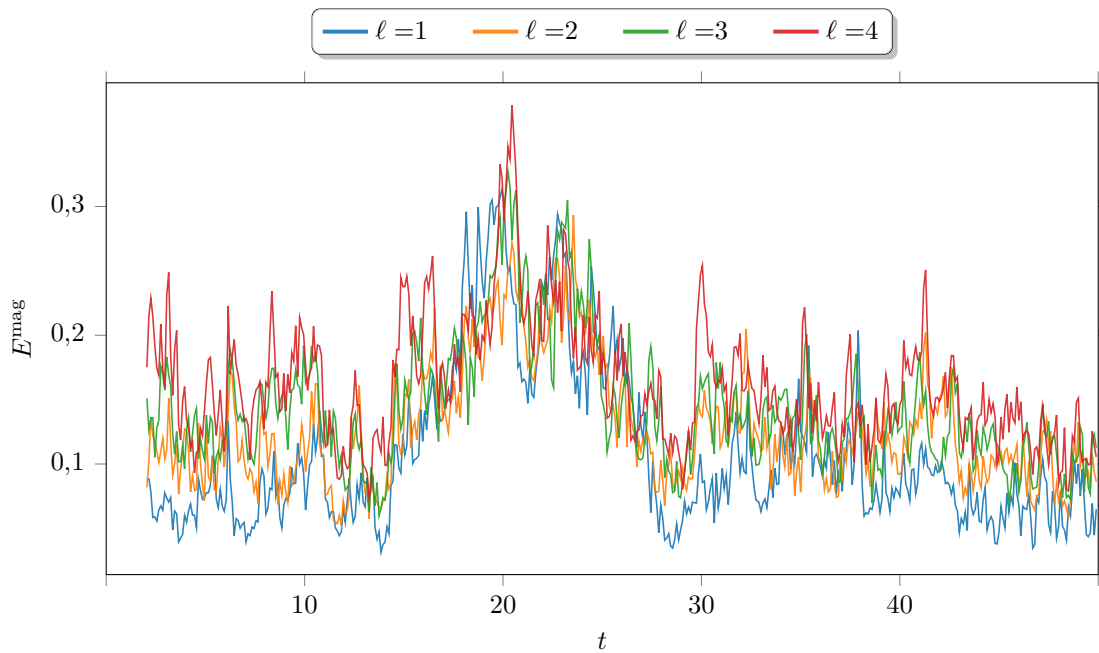


Figura 5.4: Energía magnética de la simulación S00 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 50$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

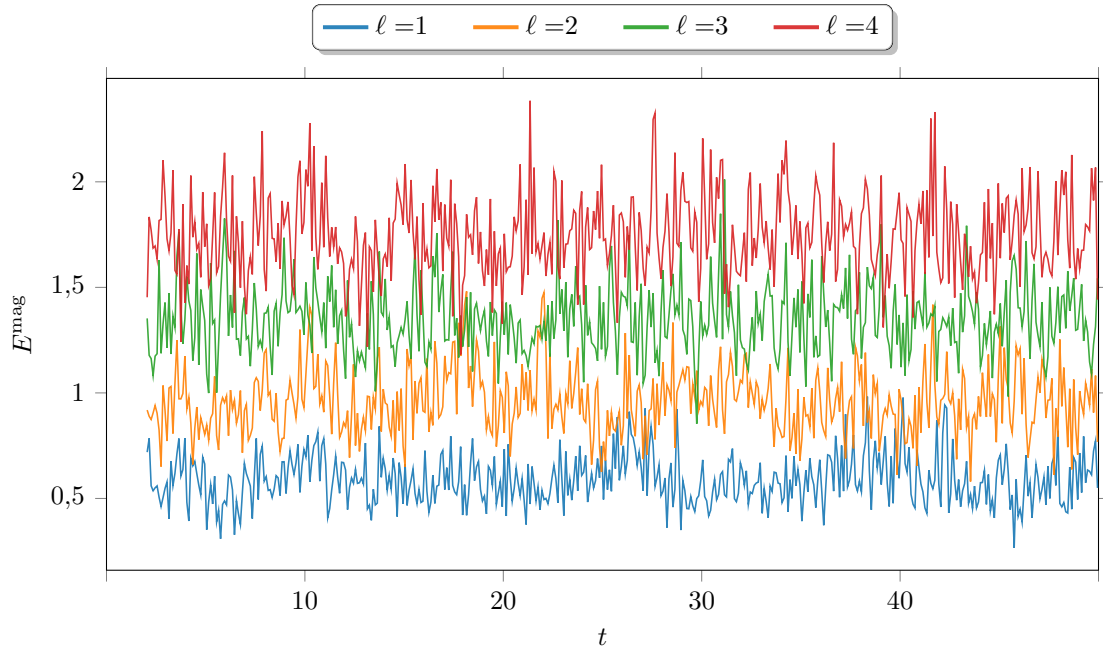


Figura 5.5: Energía magnética de la simulación S01 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 50$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

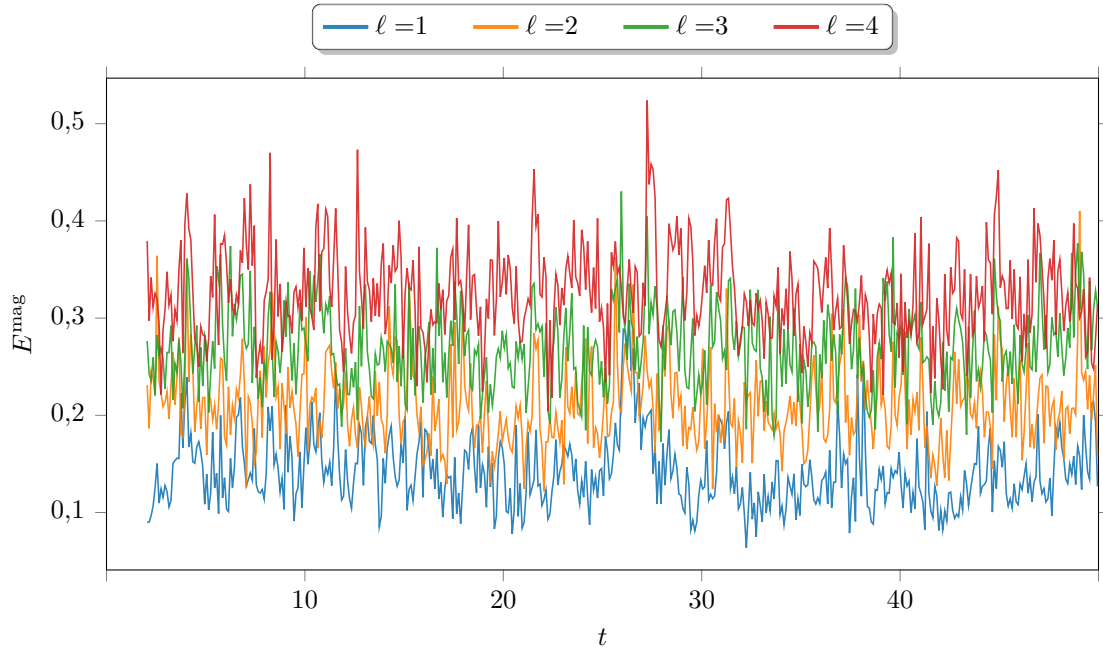


Figura 5.6: Energía magnética de la simulación S02 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 50$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

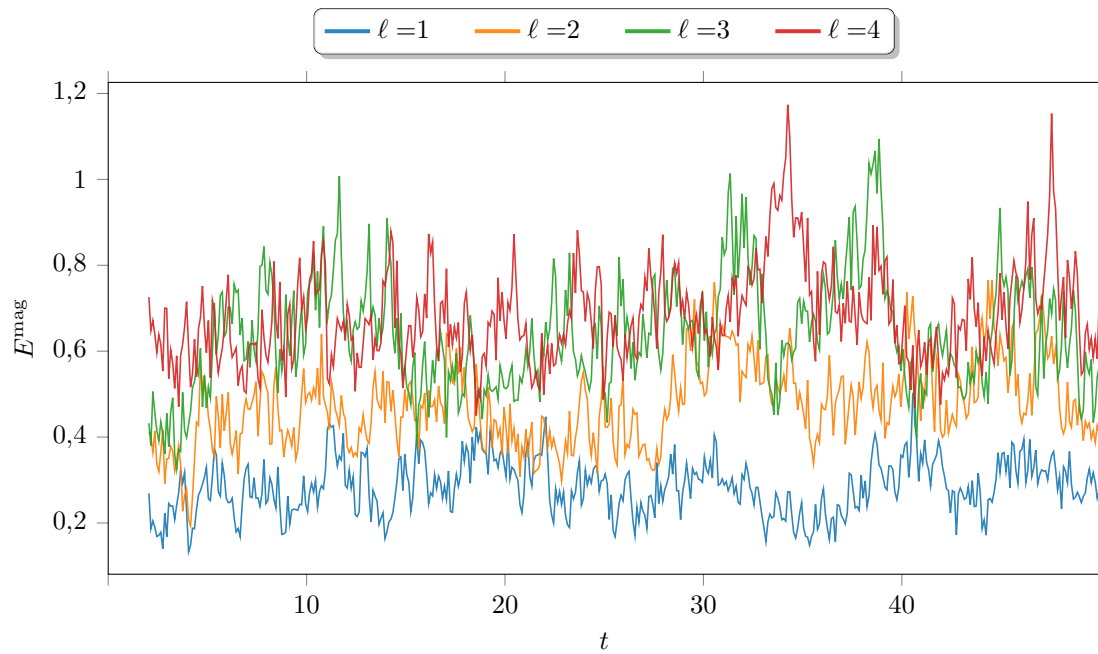


Figura 5.7: Energía magnética de la simulación S03 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t=50$. El término $\ell=1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell=4$.

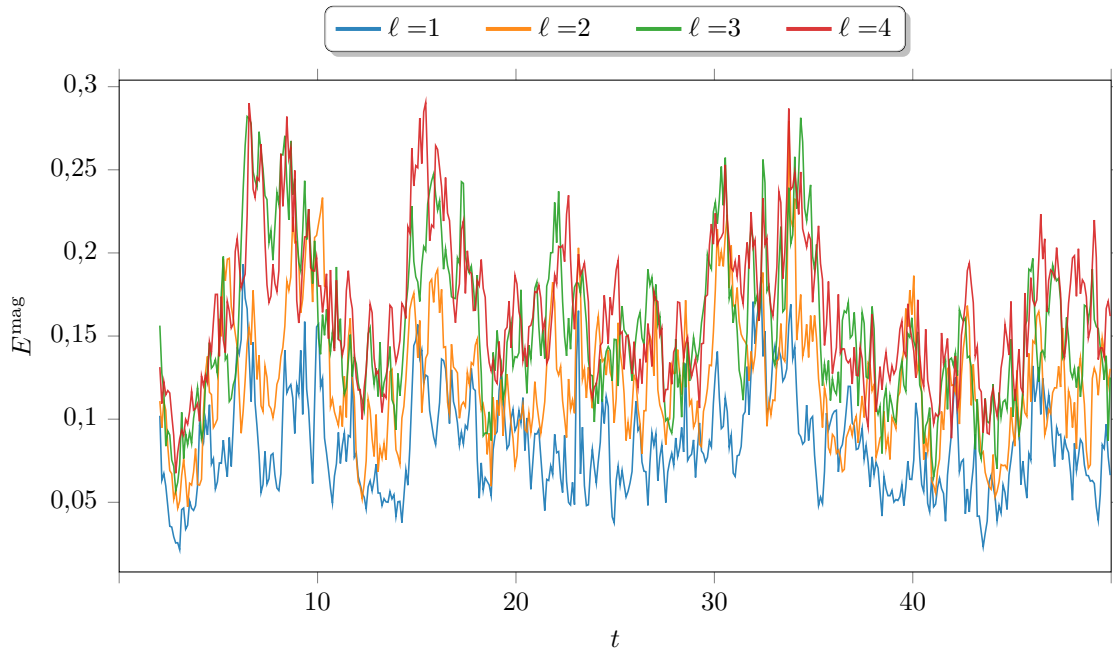


Figura 5.8: Energía magnética de la simulación S04 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t=50$. El término $\ell=1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell=4$.

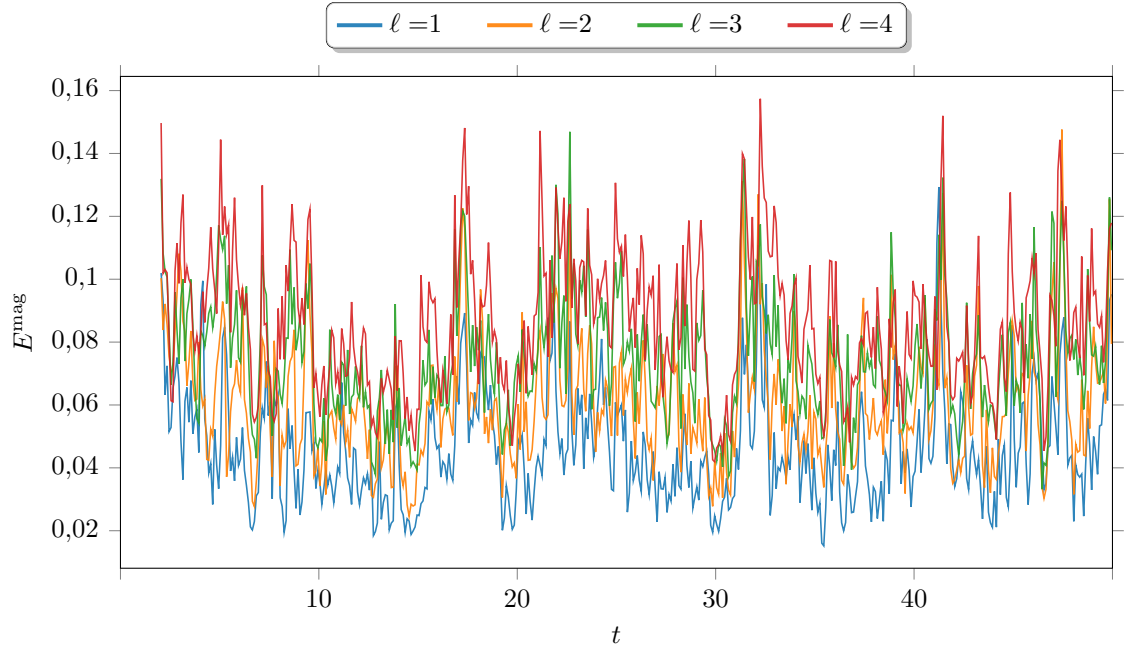


Figura 5.9: Energía magnética de la simulación S05 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 50$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

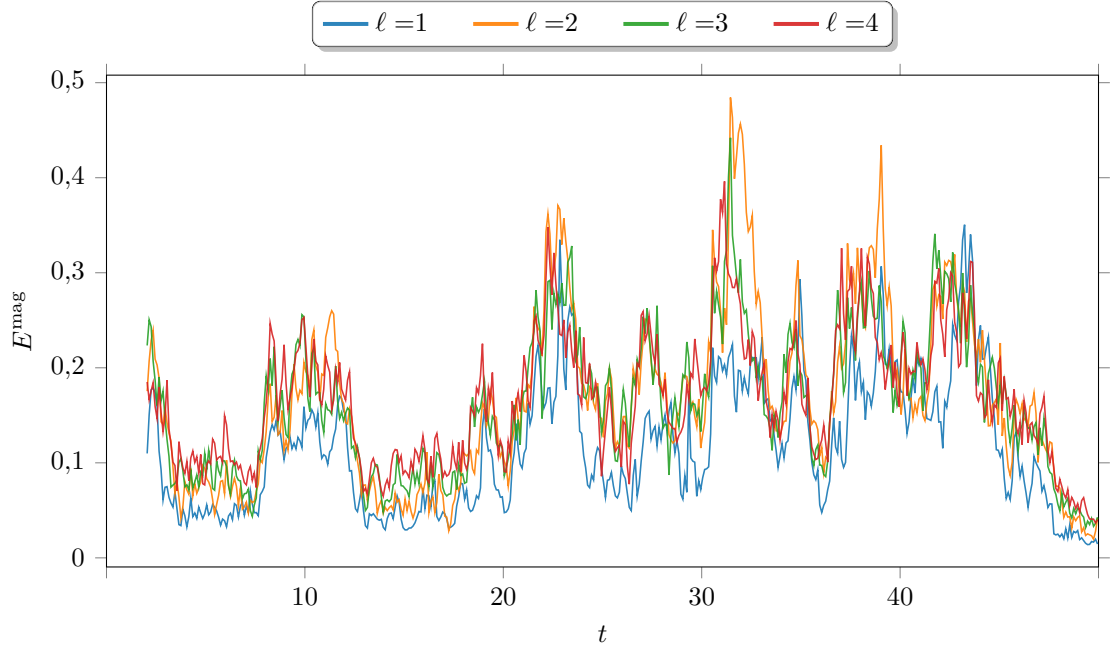


Figura 5.10: Energía magnética de la simulación S06 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 50$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

acuerdo a lo esperable, los menores acoples entre modos se dieron para valores de ν y η más pequeños, siendo más notorio este fenómeno en la simulación S01 (Figura 5.5).

Por otra parte, al modificar la velocidad angular se encontraron variaciones en los períodos asociados a las fluctuaciones de la energía magnética para cada ℓ (Figuras 5.8–5.10). Sin embargo, dichos cambios de período no implicaron variaciones cualitativas en el acople de modos.

5.2.2. Series temporal y espectral del momento dipolar magnético

Una característica encontrada en los casos de dínamo de pequeña escala fue que las diferentes componentes, m_x , m_y y m_z , se comportaron con notable similaridad (en sentido estadístico), por lo que a continuación se presentarán los resultados sólo de la cantidad m_z .

Tiempo

Se observa en las Figuras 5.11–5.17 que las respectivas series temporales presentan numerosos cambios en el signo de m_z (entre 200 y 1.000, según el caso) y con tiempos de espera, en general, extremadamente cortos. Estos últimos son, a su vez, aún menores al disminuir ν (resultando en un número de Reynolds mayor), como se aprecia en las simulaciones S01 y S02. Sin embargo, esto no se traduce en una relación directa entre la frecuencia de las reversiones y el número de Reynolds. Prueba de ello son las simulaciones S04, S05 y S06 dónde al aumentar Re (S04 \rightarrow S05) los cambios de signo se producen más frecuentemente pero un leve aumento adicional (S05 \rightarrow S06) genera reversiones con un notable espaciamiento temporal.

Si se analizan los números de Ekman obtenidos en las diferentes simulaciones tampoco se obtiene una correspondencia clara entre dicho parámetro y la frecuencia de las reversiones. No obstante, la simulación S06 parece mostrar un valor crítico por encima del cual se obtiene un momento dipolar con una estabilidad notablemente mayor. Corroborar esta última afirmación requerirá nuevas simulaciones.

Finalmente, si se examina el rol del número de Reynolds magnético y del número de Ekman magnético (definido como $Em = Ek/P_m$) los mismos parecen tener poco control sobre el comportamiento de m_z . En particular, Em resulta idéntico y Rm considerablemente similar si se comparan las simulaciones S01 y S03 (Figuras 5.12 y 5.14). Sin embargo, la cantidad y frecuencia de reversiones en uno y otro caso difieren notablemente. Esto representa una marcada diferencia con el geodínamo, donde estudios numéricos sugieren que son Em y Rm los parámetros más relevantes para controlar el comportamiento de m_z (Christensen et al. 2010).

Frecuencia

Al analizar el espectro de potencia escalado por la frecuencia se encontraron manifestaciones de ruido $1/f$ en todos los casos. En la simulación de referencia (S00) dicho comportamiento se concentró mayormente en el intervalo comprendido entre 1×10^0 y

1×10^1 , es decir, en las frecuencias más altas. Las corridas S01, S02 (menor ν y mayor Re) y S04 (menor Ω y mayor Ek) resultaron ligeramente diferentes, mostrando un rango de $1/f$ entre 10 % y 20 % menor. Dicha diferencia se produjo en la región de $f \approx 1 \times 10^0$.

En el caso de las simulaciones S04 y S06 (Figuras 5.15 y 5.17) se encontró un rango sensiblemente mayor de $1/f$. En la primera, este abarcó en forma aproximada el intervalo $(2 \times 10^{-1}; 1 \times 10^1)$ mientras que, para la segunda, se apreciaron dos zonas diferentes, y próximas entre sí, con dicho comportamiento: los intervalos $(6 \times 10^{-2}; 1 \times 10^0)$ y $(1,5 \times 10^0; 8 \times 10^0)$. Esto último indica dos escalas temporales diferentes en las que m_z resultó autosemejante, fenómeno para el cuál no ha sido posible formular una explicación.

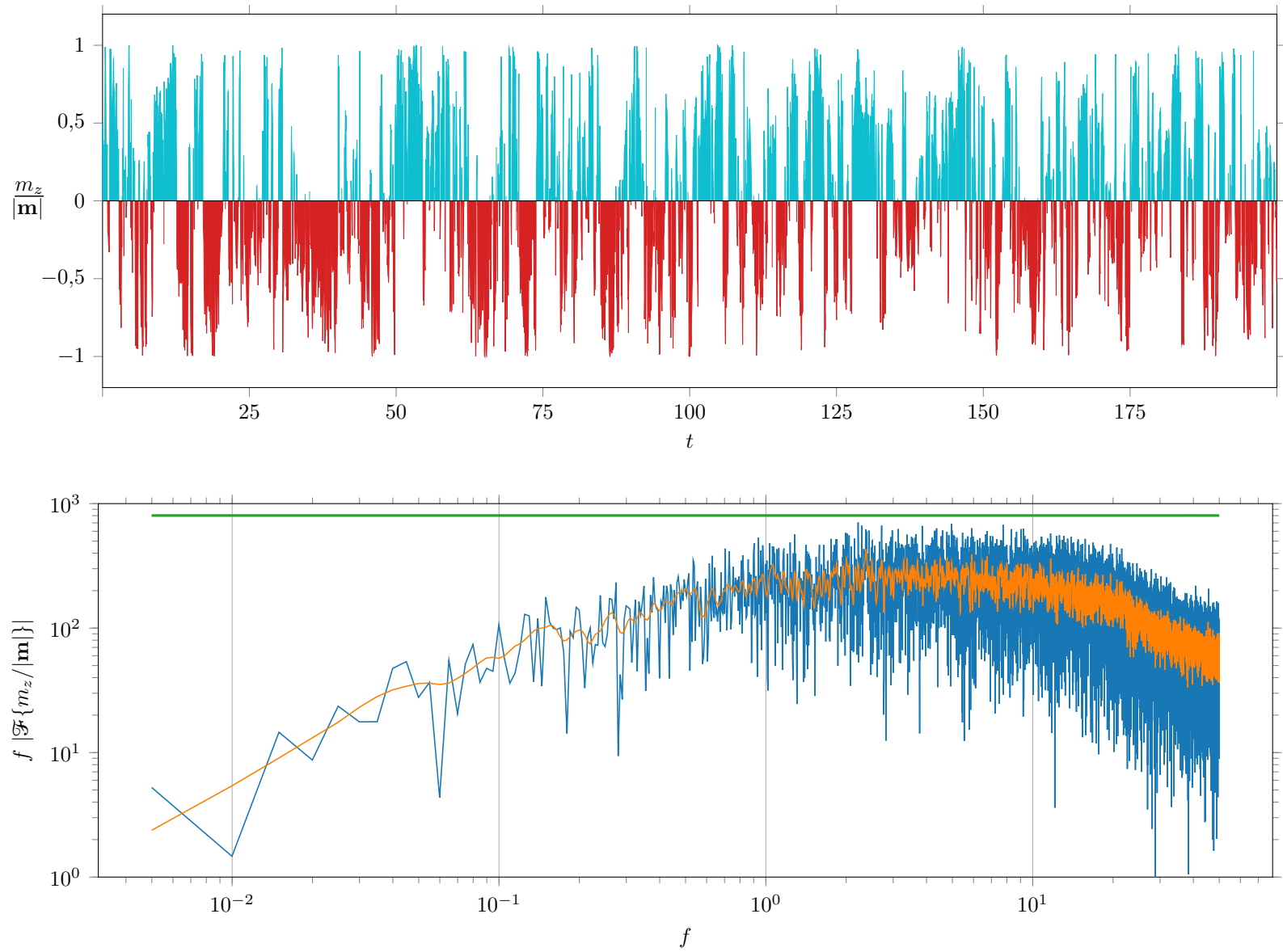
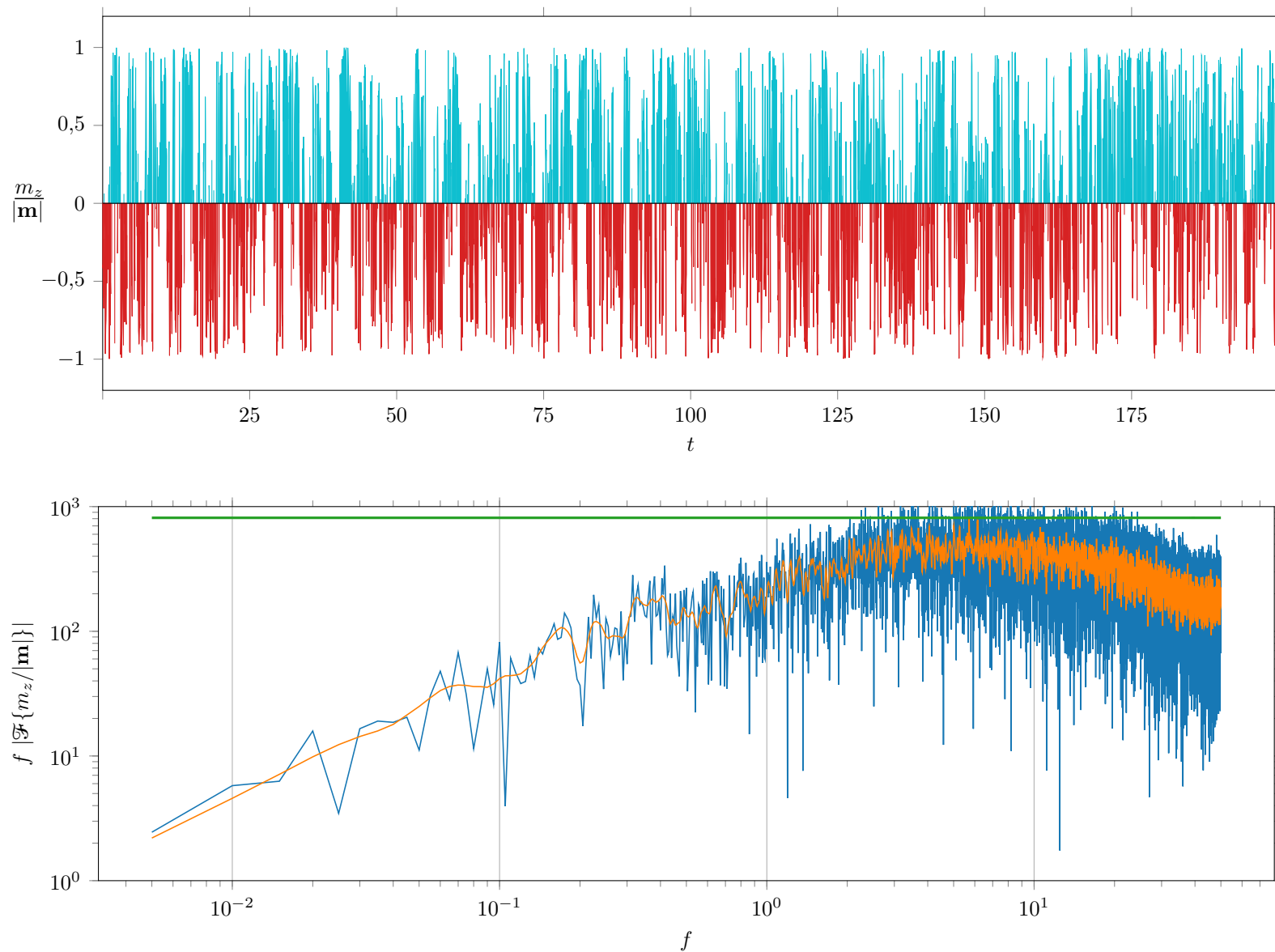


Figura 5.11: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación S00. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.

Figura 5.12: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|m|$ para la simulación S01. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.



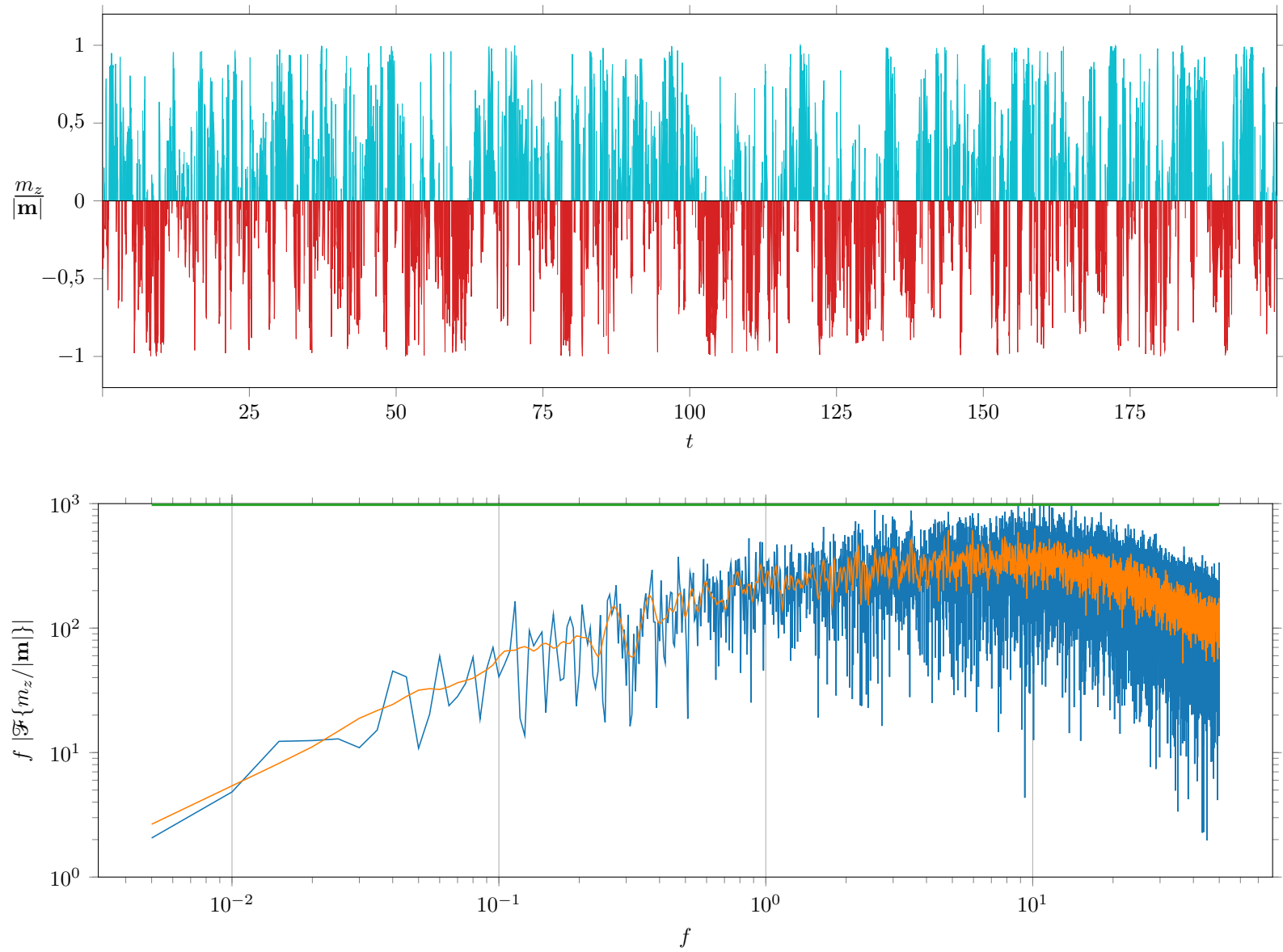
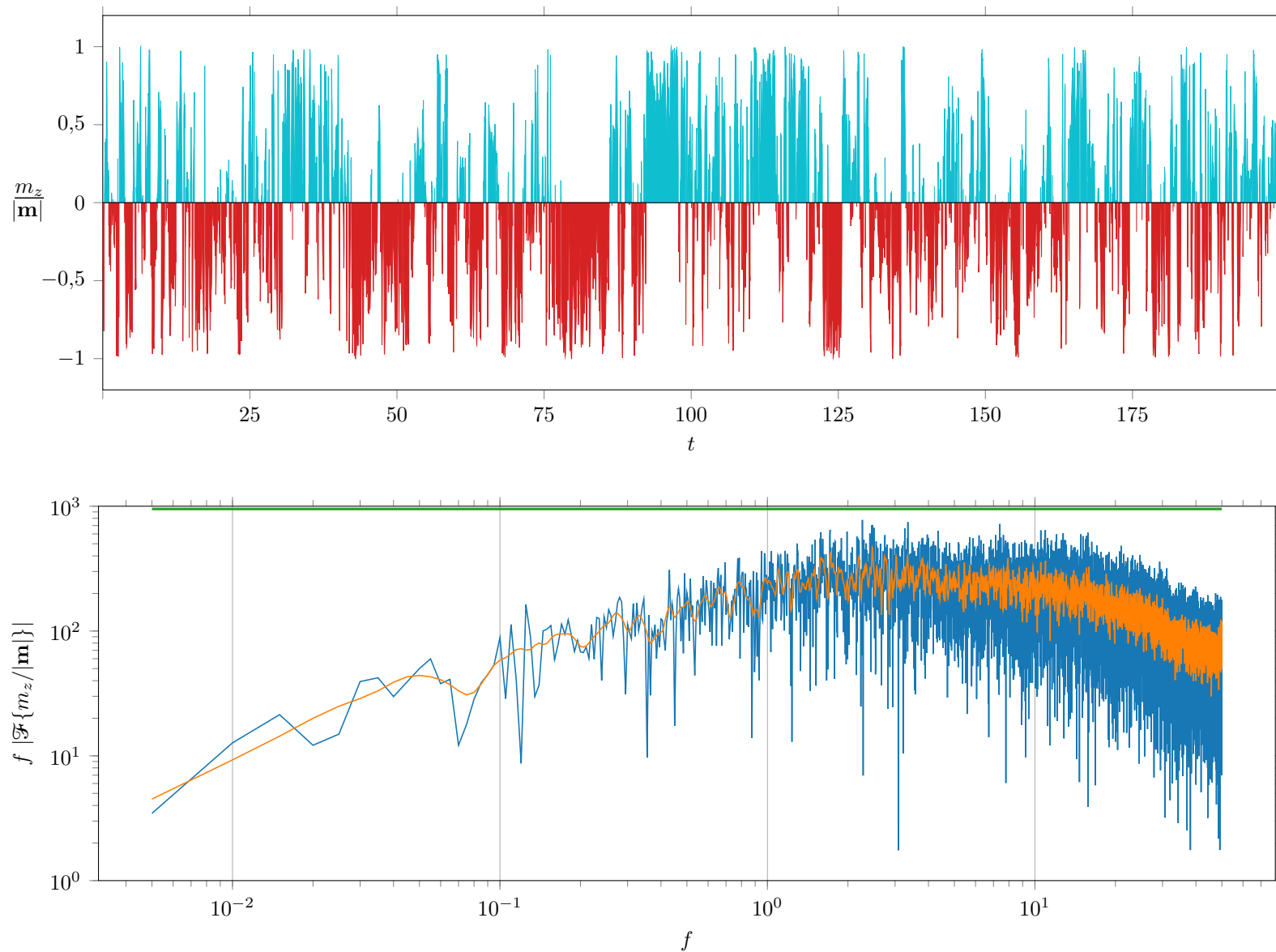


Figura 5.13: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación S02. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.

Figura 5.14: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|m|$ para la simulación S03. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.



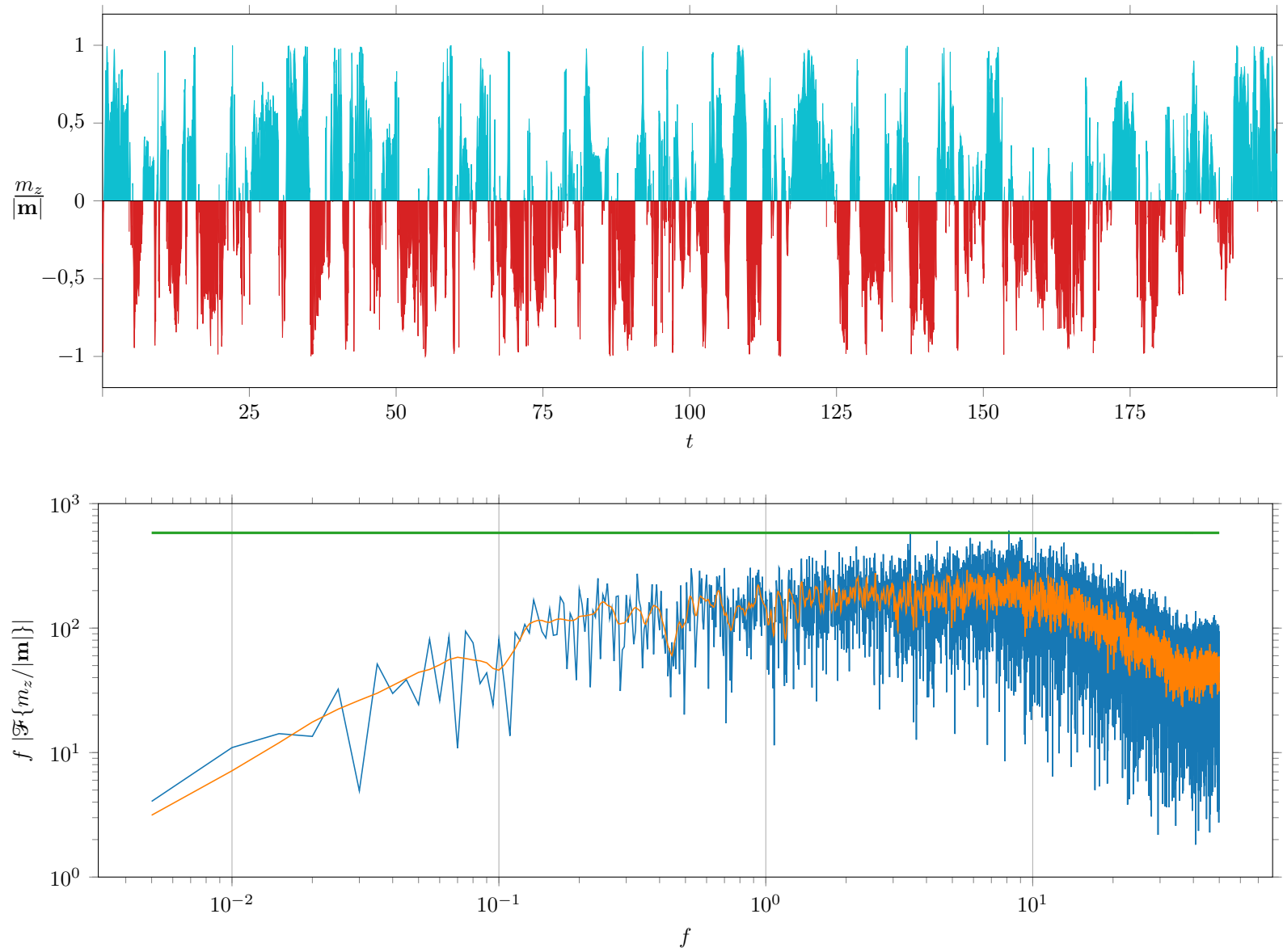
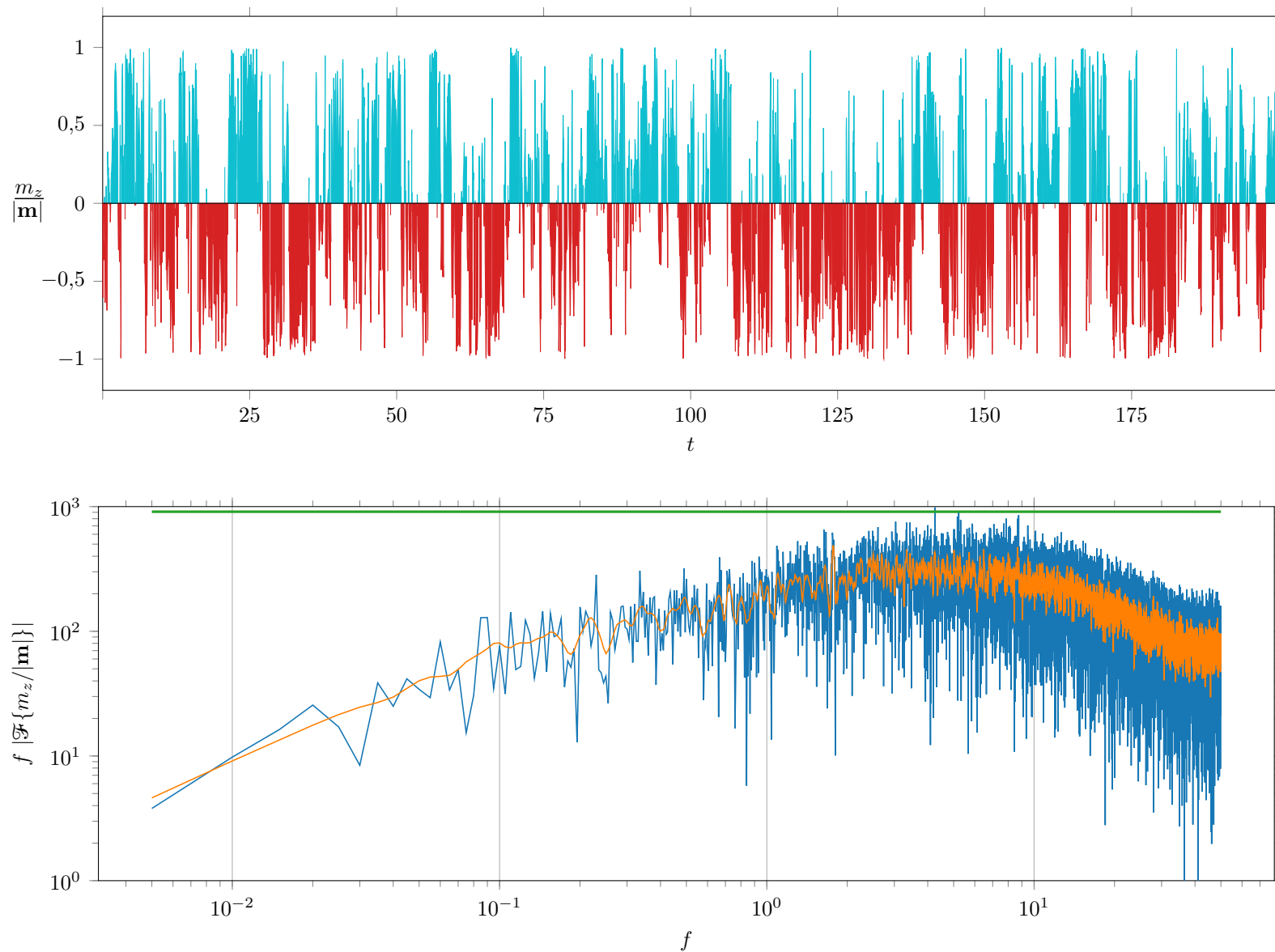


Figura 5.15: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación S04. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.

Figura 5.16: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|m|$ para la simulación S05. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.



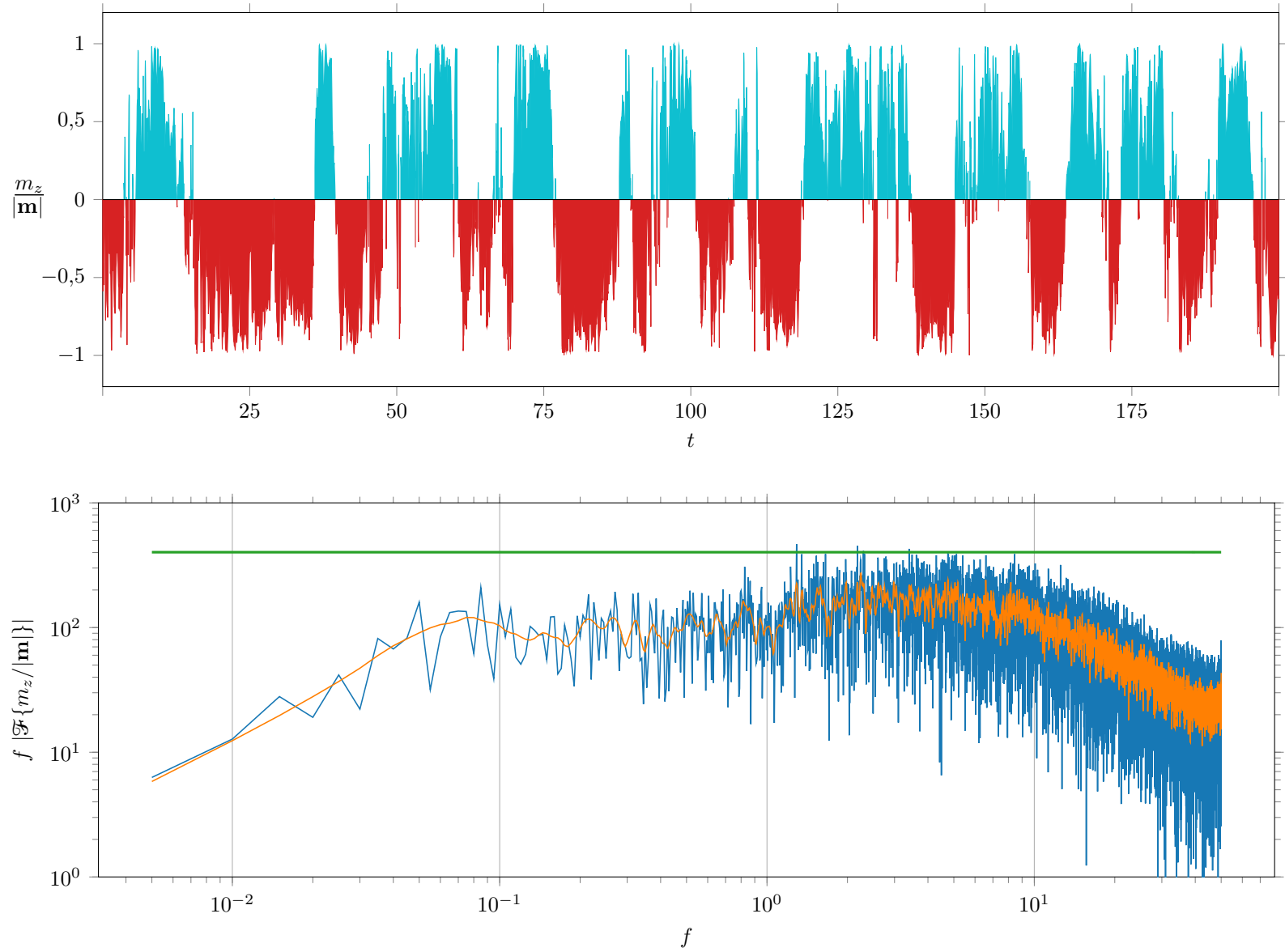


Figura 5.17: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación S06. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.

5.3. Análisis del campo magnético obtenido para los dínamos mayormente dipolares

5.3.1. Energía magnética en función de ℓ

Para las simulaciones de dínamo dipolar se obtuvieron distribuciones de la energía magnética por valor de ℓ cualitativamente diferentes a las mostradas en la [Sección 5.2.1](#), como se puede apreciar en las [Figuras 5.19–5.23](#). Del análisis de las mismas se desprende que la energía para $\ell = 1$ resultó dominante frente a los otros modos, al menos por períodos temporales importantes. Esto reproduce resultados teóricos bien conocidos (P. Roberts et al. [2000](#), págs. 1096-1097) que establecen la importancia de la helicidad cinemática (normalizada por la energía cinética) para lograr la transferencia de energía magnética desde configuraciones de escalas más pequeñas hacia una configuración de gran escala (asociada al término dipolar).

Por otra parte, se observaron comportamientos marcadamente diferentes al variar las difusividades y la velocidad angular. El caso más representativo fue el de la simulación D02 donde, mediante valores comparativamente altos de ν y η (bajos valores de Re y Rm), se alcanzó una distribución de energía (por valor de ℓ) prácticamente constante. En particular, la energía del término dipolar representó casi el 50 % de la energía magnética total, porcentaje muy similar al calculado para el dínamo terrestre (Langel et al. [1982](#)). La simulación D01 (valores intermedios de Re y Rm) también mostró una alta proporción de su energía magnética concentrada en el término dipolar (alrededor del 30 %). En conjunto, las simulaciones D01 y D02 parecen indicar un importante rol de los procesos disipativos en la cascada inversa de la energía magnética.

Por otra parte, en la simulación D03 (Ek intermedio) se obtuvo una mayor mezcla de energía para diferentes valores de ℓ y una notable reducción de los intervalos en los cuales la energía dipolar resultó predominante. En la simulación D04 (bajo valor de Ek) el término $\ell = 1$ mostró ser marcadamente menor al resto hasta $t \approx 165$, momento en el que desaparecieron las fluctuaciones de alta frecuencia en la energía magnética y el término dipolar pasó a ser dominante. No ha sido posible encontrar una explicación a esta variación abrupta de la dinámica del sistema, observada también en el espectro del campo de velocidades. Sería interesante en un futuro extender esta simulación por un período de tiempo mayor para establecer si dicho comportamiento representa el estado estadísticamente estacionario del sistema. El análisis de D03 y D04 no permitió, por tanto, establecer la influencia de Ek en la transferencia de energía magnética hacia escalas mayores.

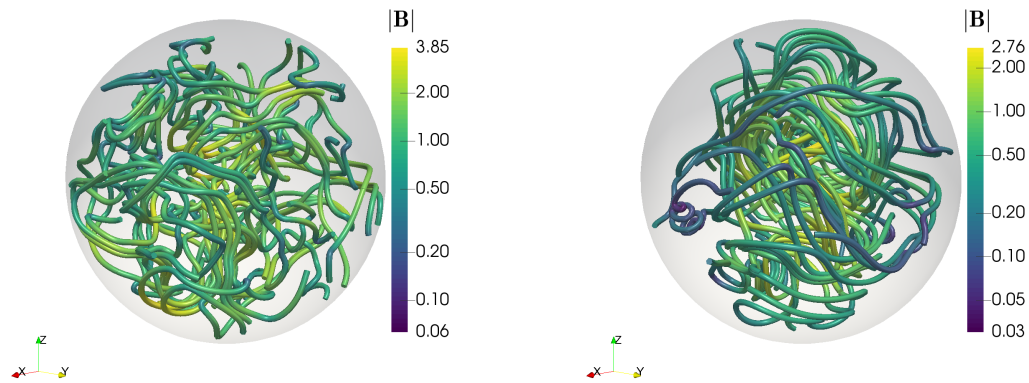


Figura 5.18: Líneas de campo para el campo magnético \mathbf{B} de las simulaciones D00 a $t = 169,5$ (izquierda) y D02 a $t = 180$ (derecha). Se utilizó la intensidad del campo \mathbf{B} respectivo para colorear las líneas de campo.

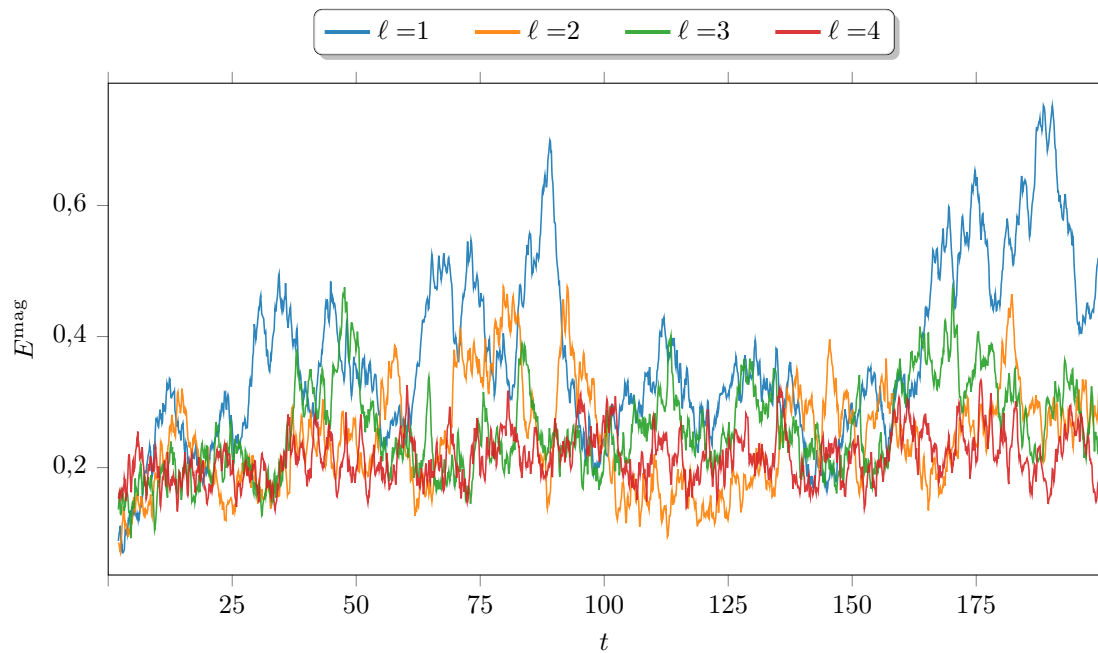


Figura 5.19: Energía magnética de la simulación D00 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 200$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

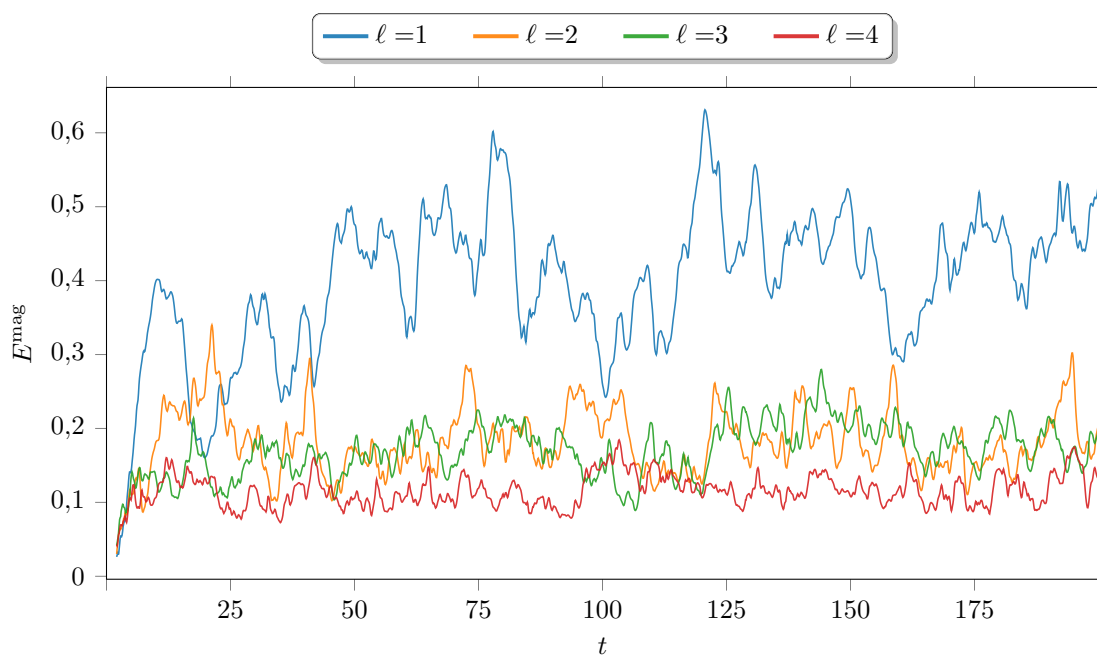


Figura 5.20: Energía magnética de la simulación D01 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 200$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

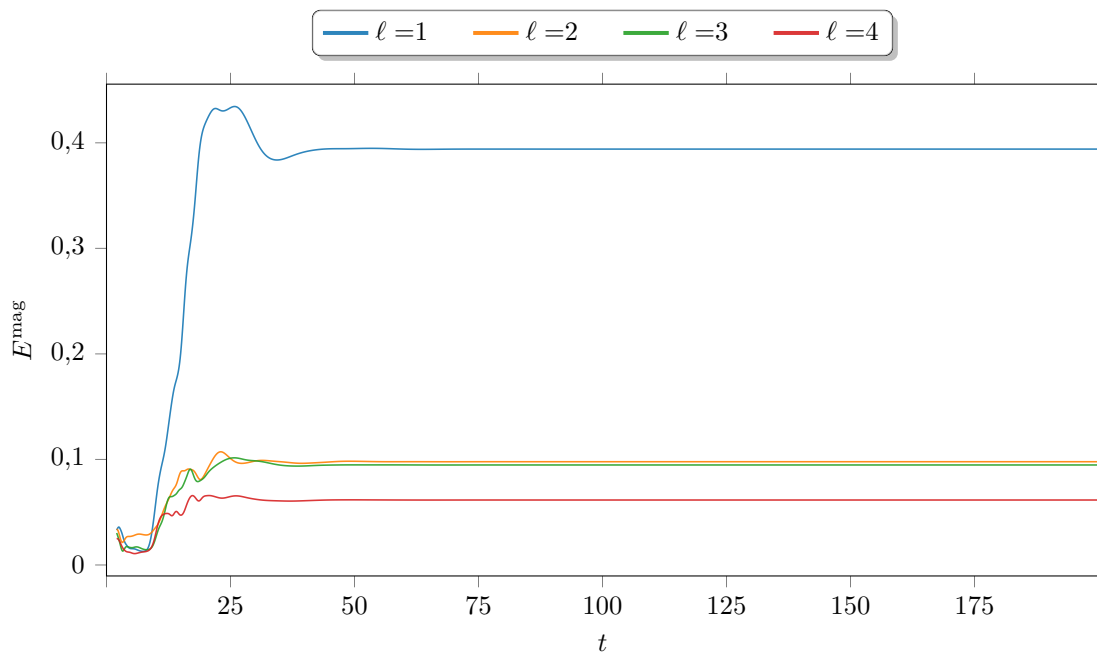


Figura 5.21: Energía magnética de la simulación D02 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t = 200$. El término $\ell = 1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell = 4$.

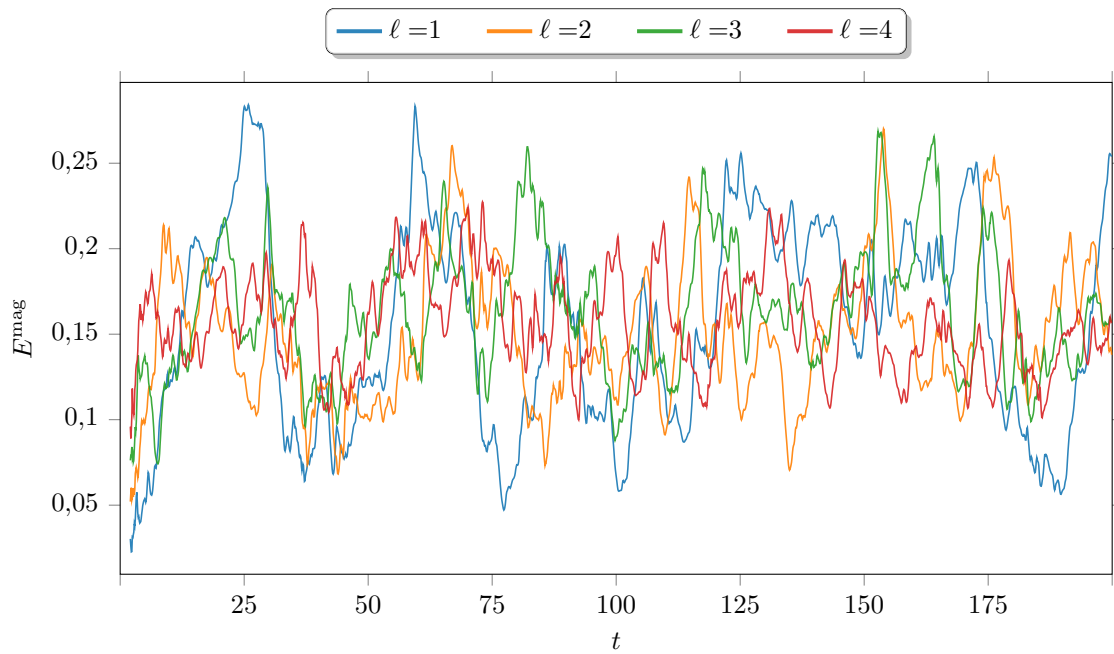


Figura 5.22: Energía magnética de la simulación D03 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t=200$. El término $\ell=1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell=4$.

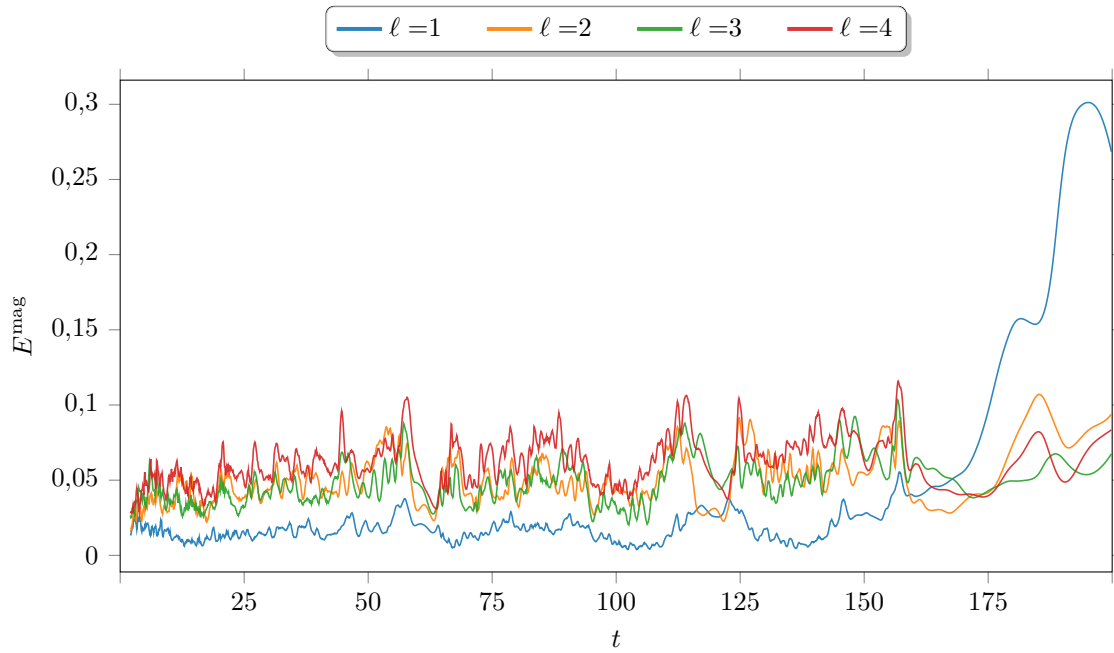


Figura 5.23: Energía magnética de la simulación D04 en función del tiempo para cada valor de ℓ y hasta $t=200$. El término $\ell=1$ (en azul) es la energía asociada al momento dipolar magnético. Las curvas para $\ell \geq 5$ se obviaron por ser cualitativamente iguales a las obtenidas para $\ell=4$.

5.3.2. Series temporal y espectral del momento dipolar magnético

En el caso de los dínamos dipolares no se observó la simetría entre las componentes de \mathbf{m} detalladas en la Sección 5.2.2, resultando m_x , m_y y m_z estadísticamente diferentes. La disparidad entre m_x y m_y puede ser explicada por la utilización de un forzado no-simétrico y representa una limitación adicional a la hora de comparar los resultados aquí presentados con el caso del geodínamo.

No obstante la asimetría mencionada, se presentarán y analizarán a continuación las series temporales y espectrales del momento dipolar magnético sólo para la componente m_z , ya que fue esta última la que mostró elementos más interesantes.

Tiempo

En el caso dipolar, las series temporales de $m_z/|\mathbf{m}|$ (Figuras 5.24–5.28) mostraron comportamientos dispares sobre la región estudiada del espacio de parámetros exhibiendo entre 4 y 80 inversiones de polaridad. En particular, la simulación de referencia (D00) exhibió numerosas reversiones y los tiempos de espera asociados a las mismas resultaron muy variables.

Las Figuras 5.25 y 5.26, muestran que al aumentar los valores de ν y η (i.e. al disminuir Re y Rm), se obtuvo una mayor estabilidad en el momento dipolar. Particularmente, en la Figura 5.25 (simulación D01) se observan reversiones de duración extremadamente corta en lo que, de otra manera, sería un gran período de polaridad constante. Este comportamiento guarda similitudes con las épocas y eventos del campo magnético terrestre. Adicionalmente, para valores aún más altos de ν y η , se obtuvo un momento dipolar sin reversiones y prácticamente constante para $t \geq 15$ (Figura 5.26). Estos resultados reproducen los hallazgos de Christensen et al. (2010) donde se sugiere que valores muy bajos de Rm dan lugar a dínamos demasiado dipolares y, por tanto, presentan pocas reversiones.

Por otra parte, en la simulación D03 (Figura 5.27), el aumento de la velocidad angular (i.e. disminución de Ek) dio lugar a una componente $\hat{\mathbf{z}}$ del momento dipolar más dominante (puede verse en el gráfico como $m_z/|\mathbf{m}| \approx 1$) y, en consecuencia, disminuyó notablemente la cantidad de reversiones en comparación a la simulación de referencia. Al aumentar aún más la velocidad angular (simulación D04) no sólo se obtuvo una mayor intensidad para $m_z/|\mathbf{m}|$, sino que las reversiones se amplificaron rápidamente, como muestra la Figura 5.28. En la misma, se aprecia también un cambio de comportamiento para $t \geq 150$, en conformidad con lo detallado en la sección previa para la misma simulación.

Frecuencia

Al analizar la serie espectral de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación de referencia D00 (Figura 5.24, ésta mostró un rango de comportamiento $1/f$ extenso, abarcando éste el intervalo $(4 \times 10^{-2}, 1,7 \times 10^0)$. En comparación a las simulaciones de dínamos de pequeña escala, el ruido $1/f$ aparece desplazado hacia la parte baja del espectro.

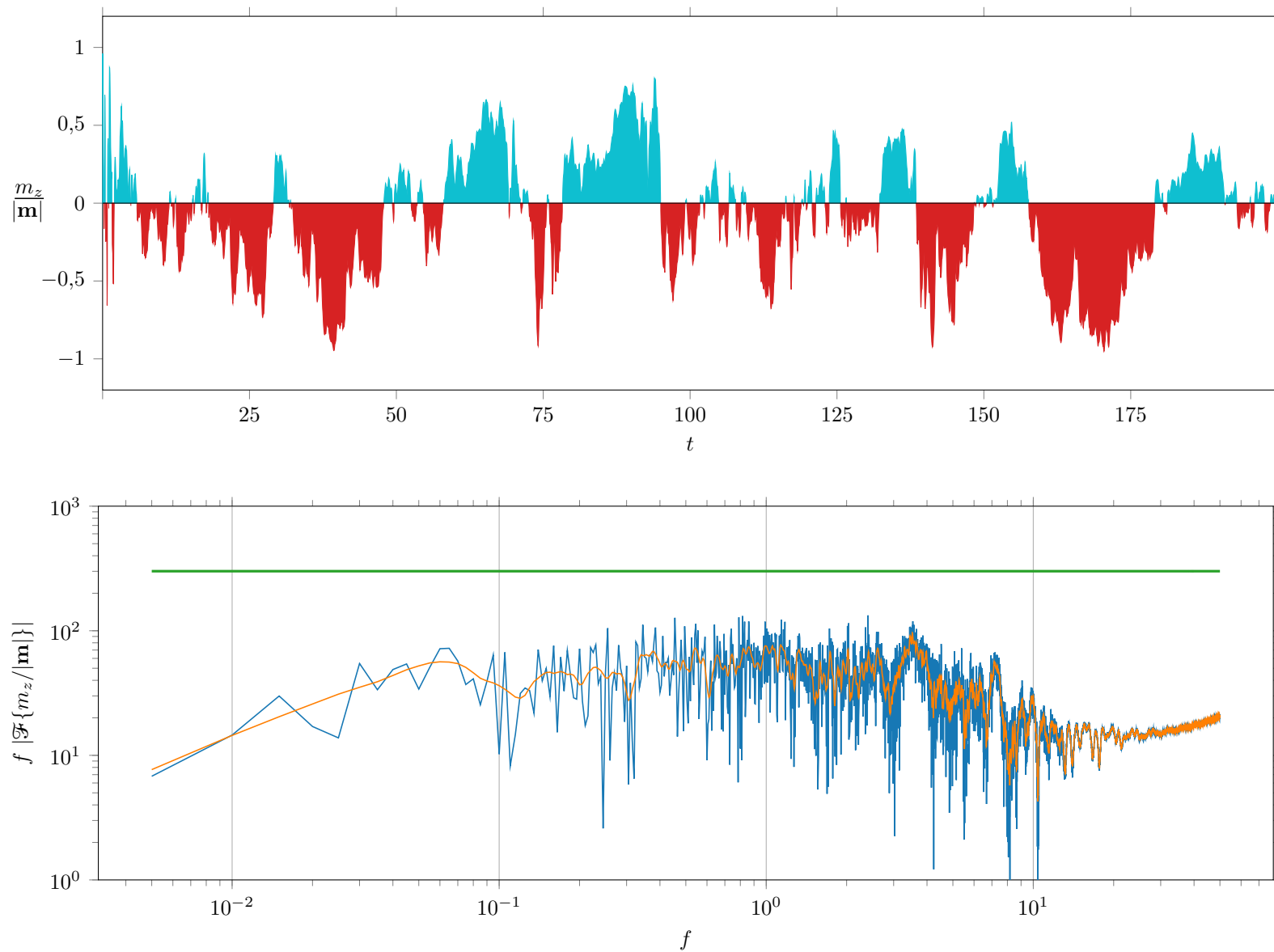
En el caso de las simulaciones D01 y D02, se observó que valores más altos de las constantes ν y η (disminución de Re y Rm) dieron lugar a una reducción en el rango de

ruido $1/f$. Para D01 (Re y Rm intermedios), éste quedó comprendido, aproximadamente, entre 2×10^{-2} y 7×10^{-1} , mientras que para D02 (Re y Rm bajos), la carencia de reversiones trajo aparejada la ausencia de regiones $1/f$.

Por otra parte, las simulaciones D03 y D04 (valores de Ek intermedio y bajo, respectivamente) muestran intervalos de $1/f$ similares entre sí, siendo éste (4×10^{-2} , 8×10^{-1}) para la primera y (4×10^{-2} , 7×10^{-1}) para la segunda. No obstante, los mismos resultan diferentes (en su límite superior) a los obtenidos en D00.

Finalmente, vale mencionar que la escasez de datos en la parte baja del espectro limitó fuertemente la estimación de cotas inferiores para las regiones $1/f$. Por lo tanto, es posible que los intervalos de ruido $1/f$ aquí presentados se extiendan hacia frecuencias más bajas. Comprobar si esto efectivamente sucede requeriría extender las simulaciones hasta tiempos sensiblemente mayores, por lo que no pudo verificarse en los plazos de este trabajo.

Figura 5.24: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|m|$ para la simulación D00. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.



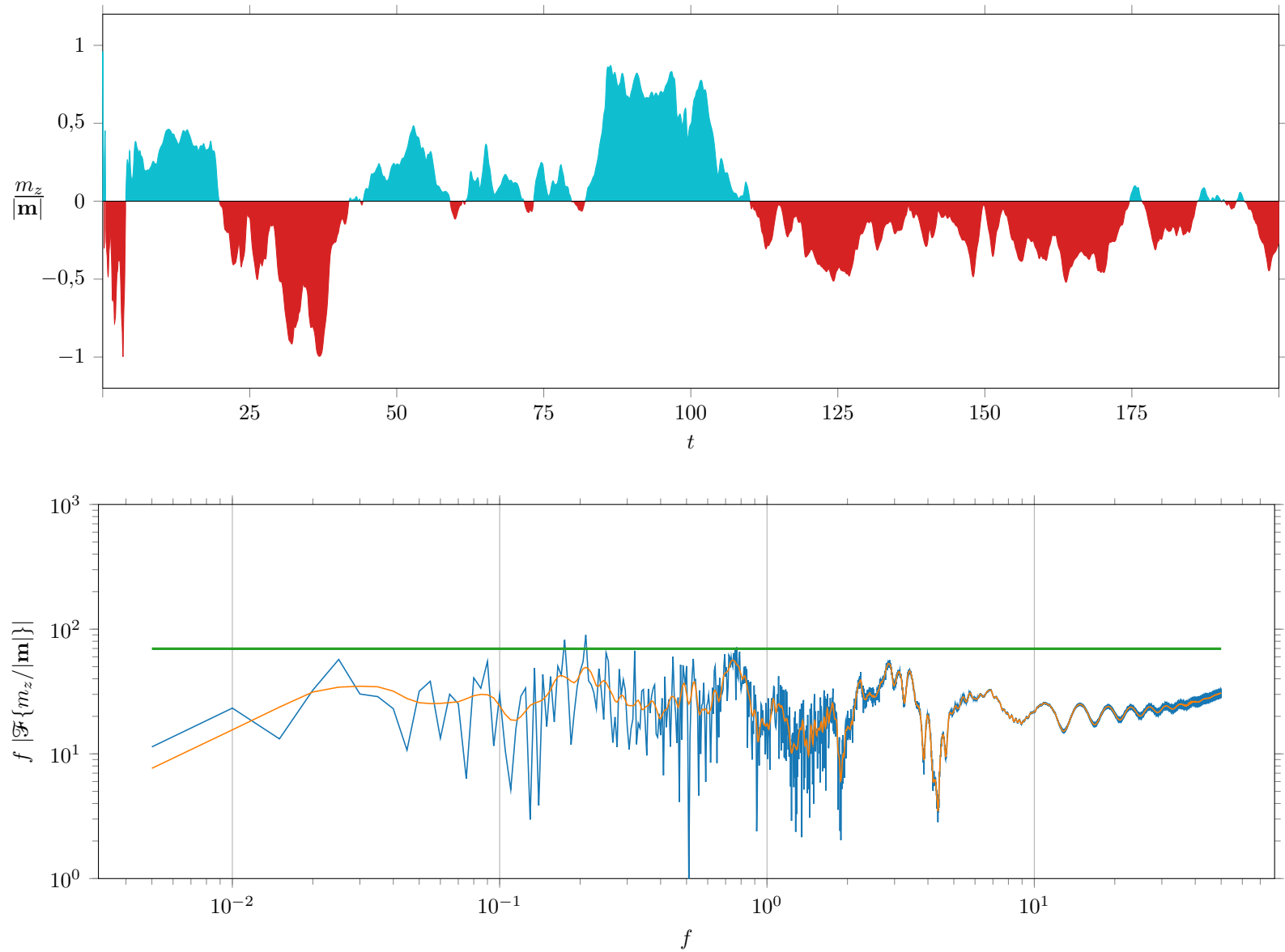
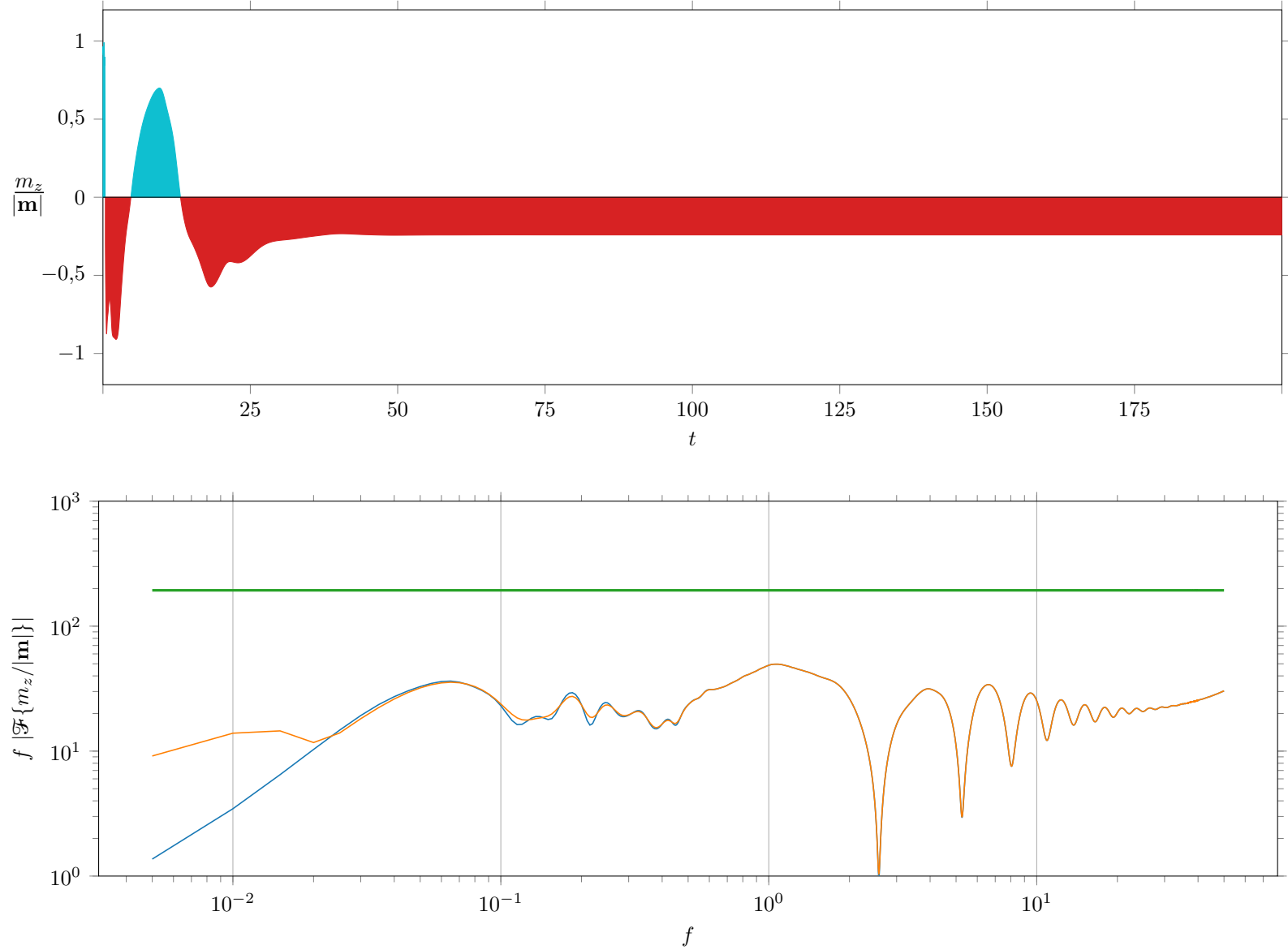


Figura 5.25: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación D01. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.

Figura 5.26: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|m|$ para la simulación D02. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.



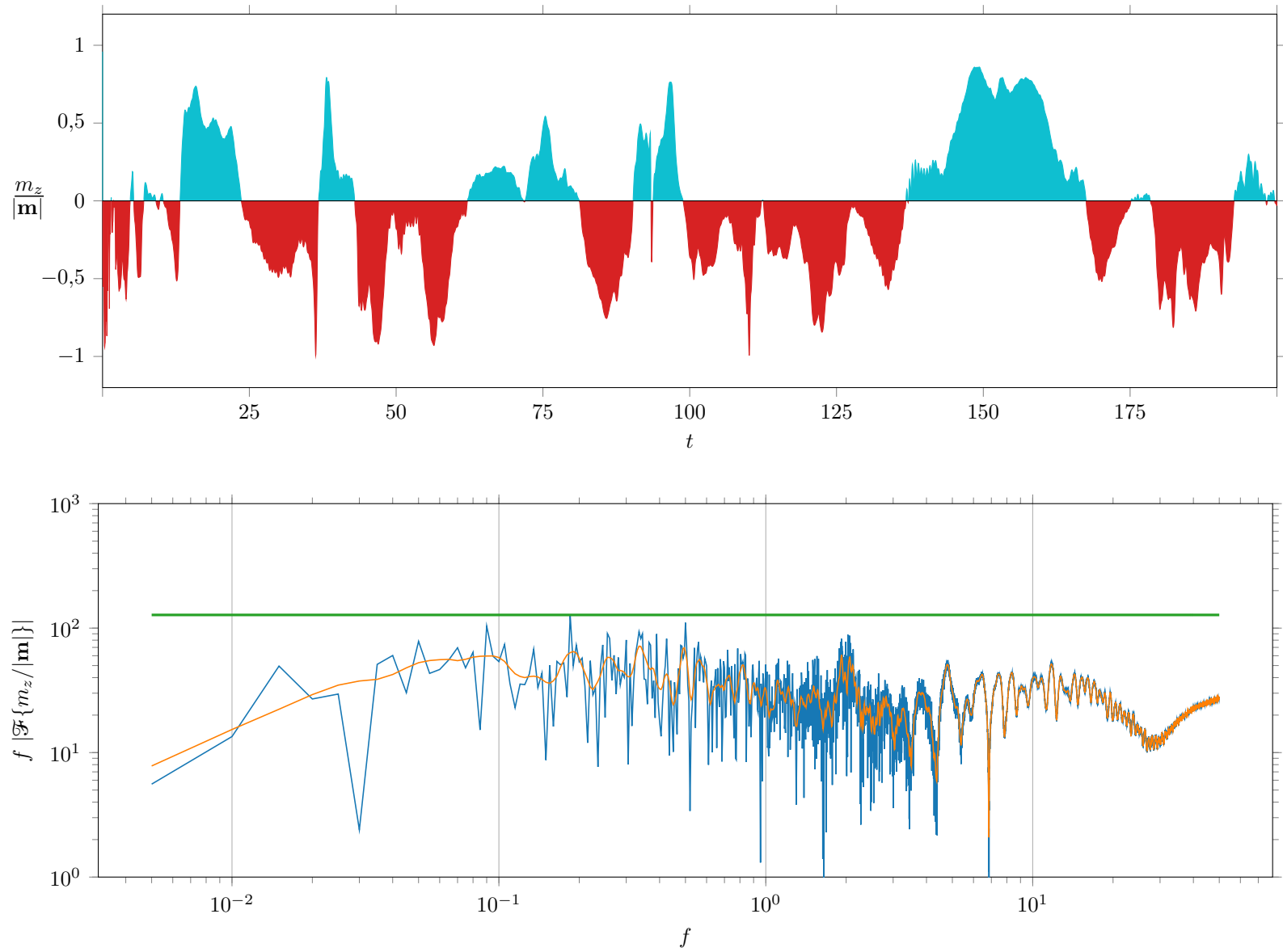
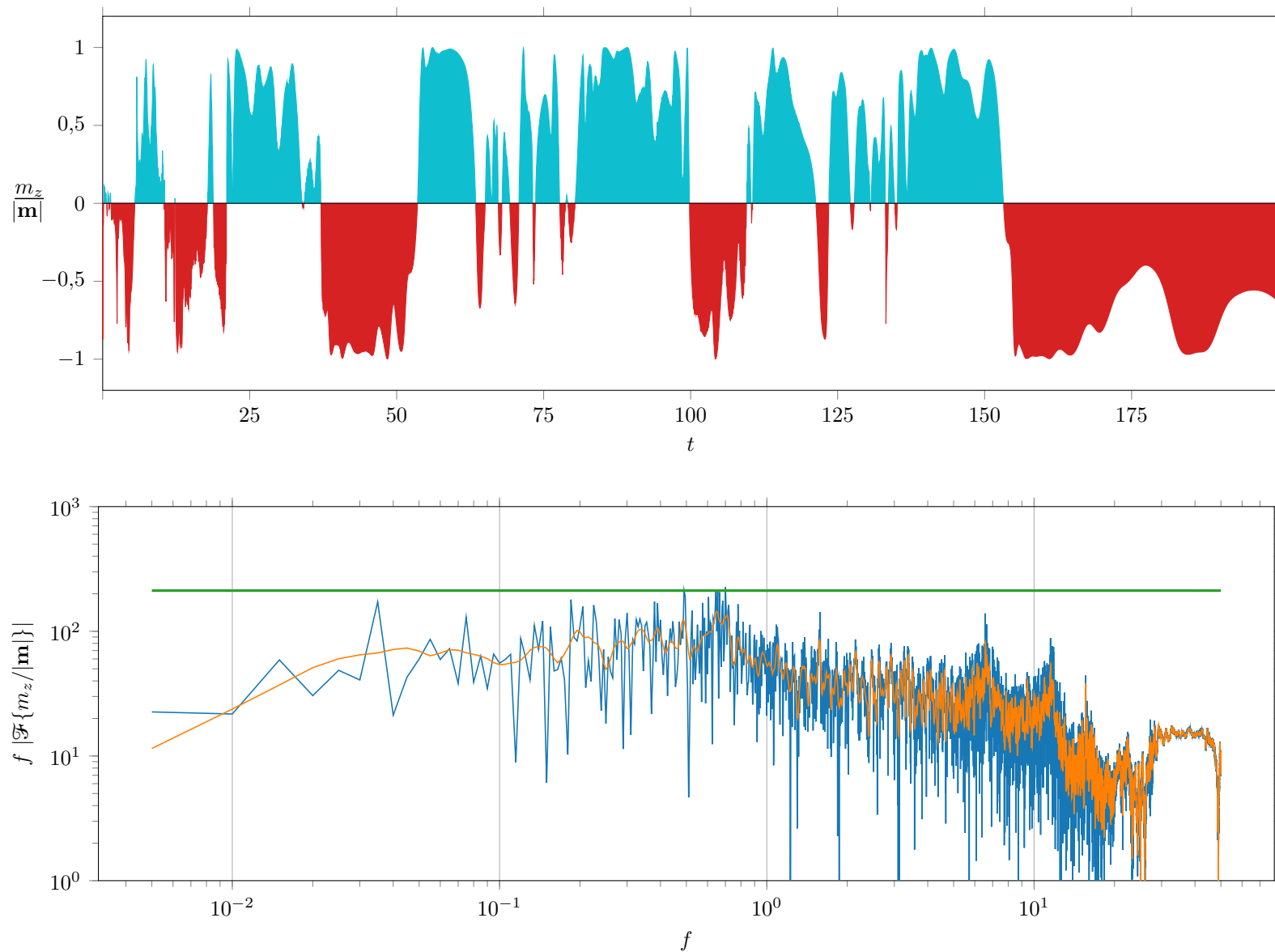


Figura 5.27: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|\mathbf{m}|$ para la simulación D03. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.

Figura 5.28: Serie temporal (arriba) y espectro de potencias escalado por frecuencia (abajo) de $m_z/|m|$ para la simulación D04. En la serie temporal se utilizaron los colores celeste y rojo para simbolizar polaridad positiva o negativa, respectivamente. En los gráficos espectrales se muestra en azul el espectro obtenido, en naranja una versión suavizada del mismo y en verde una recta de pendiente nula como referencia.



Referencias

- Christensen, Ulrich R. et al. (2010). «Conditions for Earth-like geodynamo models». En: *Earth Planet. Sci. Lett.* 296.3-4, págs. 487-496. ISSN: 0012821X. DOI: [10.1016/j.epsl.2010.06.009](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2010.06.009). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2010.06.009>.
- Langel, R. A. et al. (1982). «A geomagnetic field spectrum». En: *Geophys. Res. Lett.* 9.4, págs. 250-253. ISSN: 00948276. DOI: [10.1029/GL009i004p00250](https://doi.org/10.1029/GL009i004p00250). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/GL009i004p00250>.
- Roberts, Paul et al. (2000). «Geodynamo theory and simulations». En: *Rev. Mod. Phys.* 72.4, págs. 1081-1123. ISSN: 0034-6861. DOI: [10.1103/RevModPhys.72.1081](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.1081).
- Sanchez, Sabrina et al. (2016). «Assimilation of geomagnetic data into dynamo models, an archeomagnetic study». Tesis doct.

Conclusiones

Durante el presente trabajo se lograron simular satisfactoriamente diferentes regímenes de dínamos magnetohidrodinámicos esféricos y rotantes, tanto de pequeña escala como mayormente dipolares.

Adicionalmente, se adaptaron y reprodujeron resultados conocidos donde se establecen condiciones para favorecer la generación de dínamos dipolares: la separación entre las escalas difusiva e integral y la presencia de helicidad cinemática (P. Roberts et al. 2000). La separación de escalas pudo obtenerse mediante una descomposición C-K para el forzado en la cual los términos asociados a escalas intermedias (valores intermedios de q y ℓ) resultaran predominantes. Por otro lado, la inyección de helicidad cinemática se logró eliminando la simetría entre los términos de $q > 0$ y $q < 0$ en la mencionada descomposición.

Una característica a remarcar es que en ambos tipos de dínamos se obtuvieron reversiones en la componente del momento dipolar magnético paralela a la velocidad angular (componente \hat{z}), en similitud a lo que ocurre con el campo geomagnético. En relación a esto, las series temporales de m_z obtenidas en el caso dipolar muestran un claro contraste con las obtenidas en el caso de dinamo de pequeña escala. En el primer caso se observan períodos más extensos donde el valor de m_z mantiene un mismo signo, en mejor concordancia con el caso terrestre.

El control de los parámetros adimensionales sobre el comportamiento de m_z también resultó dispar entre los casos dipolar y de pequeña escala. Para este último fue posible mostrar que Rm y Em no resultan singularmente relevantes para regular el comportamiento del momento dipolar magnético, en contraste con los resultados obtenidos por Christensen et al. (2010) para modelos numéricos de geodínamo. En el caso de las simulaciones de dínamos dipolares sí fue posible reproducir parcialmente dichos resultados, encontrando un valor $Rm_{\text{crít}}$, similar al propuesto en Christensen et al., por debajo del cual desaparecen las reversiones.

El análisis espectral mostró importantes intervalos de ruido $1/f$ en todos los casos, excepto para la simulación D02 donde m_z resultó prácticamente constante. Esto representa una extensión para el caso disipativo de la fenomenología encontrada en P. Dmitruk et al. (2014) bajo la aproximación MHD ideal. Los valores de m_z son más fluctuantes en las simulaciones de dínamos de pequeña escala y, en consecuencia, los rangos de ruido

$1/f$ abarcan frecuencias más altas, pudiéndose resolver completamente los mismos. En los dínamos dipolares, sin embargo, los intervalos de ruido $1/f$ se sitúan en la parte baja del espectro requiriendo simulaciones de mayor duración para resolver correctamente el extremo inferior de dichos intervalos.

Por otra parte, una vez alcanzadas las soluciones estadísticamente estacionarias, los dínamos dipolares exhibieron entre 0 y 60 reversiones, según el caso. Esta cantidad resultó escasa para obtener una distribución estadística de los tiempos de espera asociados a las mismas, por lo que dicho análisis no fue incluido en este trabajo.

Finalmente, es posible concluir que el escenario planteado en este trabajo, conceptualmente más simple que el geodínamo, permitió recrear varios de los rasgos más sobresalientes del campo magnético terrestre. En particular, las fluctuaciones del momento dipolar magnético, incluidas las reversiones, mostraron una estrecha relación con la presencia de ruido $1/f$.

APÉNDICE A

Representación gráfica de las autofunciones de Chandrasekhar-Kendall

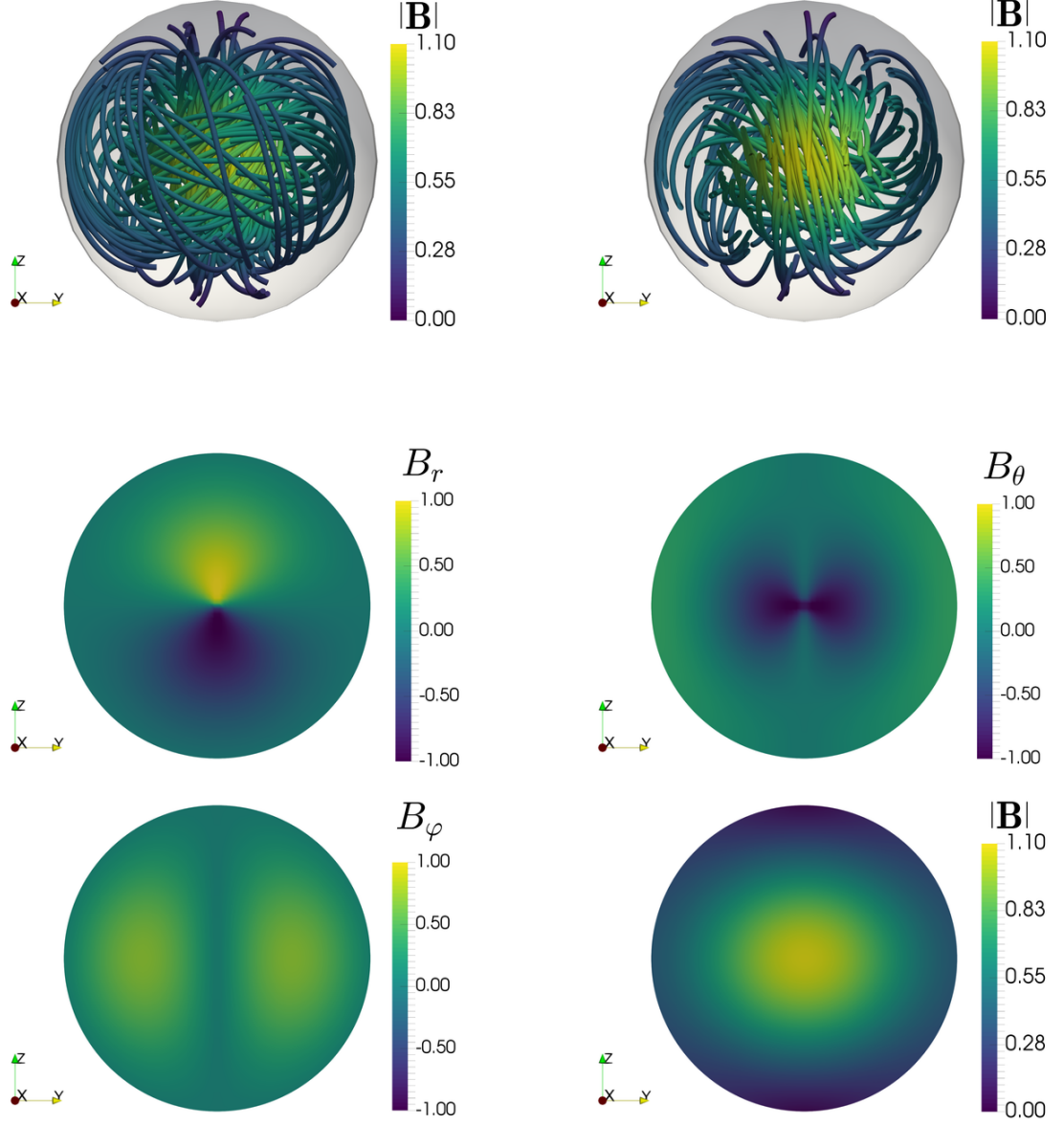
Se exponen a continuación gráficas para algunos modos C-K (introducidos en la Sección 3.1). Las mismas se obtuvieron con el software Paraview¹ utilizando datos con un grillado (en coordenadas cartesianas) de $64 \times 64 \times 64$ puntos. Para cada autofunción se presentan seis imágenes con la siguiente distribución:

- Las figuras de la fila superior muestran las líneas de campo para toda la esfera (izquierda) y para el semiespacio $x < 0$ (derecha), donde se utilizó la intensidad del campo para colorear las mismas.
- En las filas central e inferior se presentan mapas de calor para la componente radial (B_r , al centro a la izquierda), polar (B_θ , al centro a la derecha) y acimutal (B_ϕ , abajo a la izquierda) del campo, como así también para su intensidad ($|\mathbf{B}|$, abajo a la derecha). Los mismos se realizaron para el plano $x = 0$.

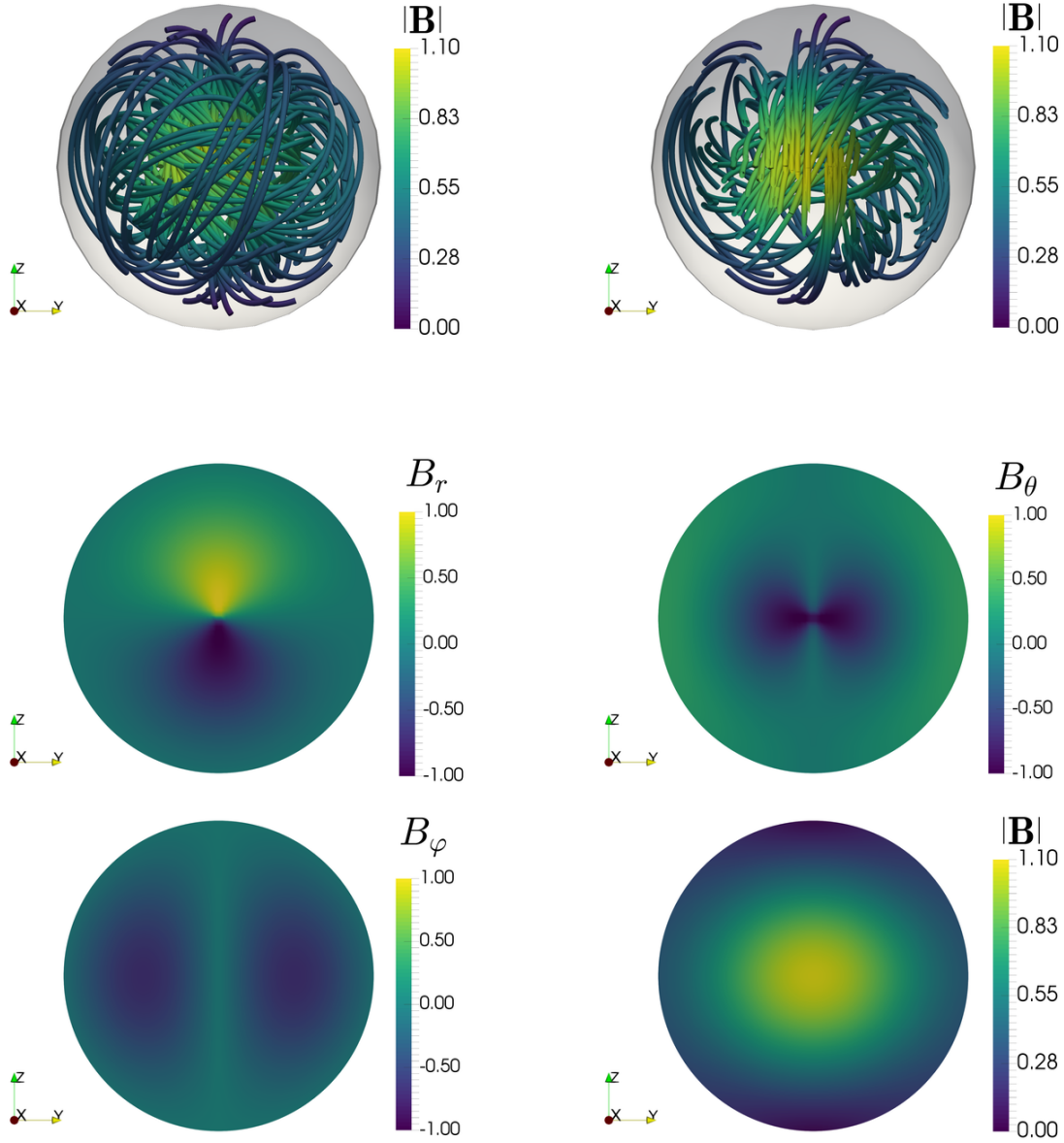
Se incorporó también, en la esquina inferior izquierda de cada imagen, un sistema de ejes cartesianos (\hat{x} , \hat{y} , \hat{z} en rojo, amarillo y verde respectivamente, formando una terna derecha).

¹Versión 5.0.2, disponible en: <https://gitlab.kitware.com/paraview/paraview/tree/v5.2.0>.

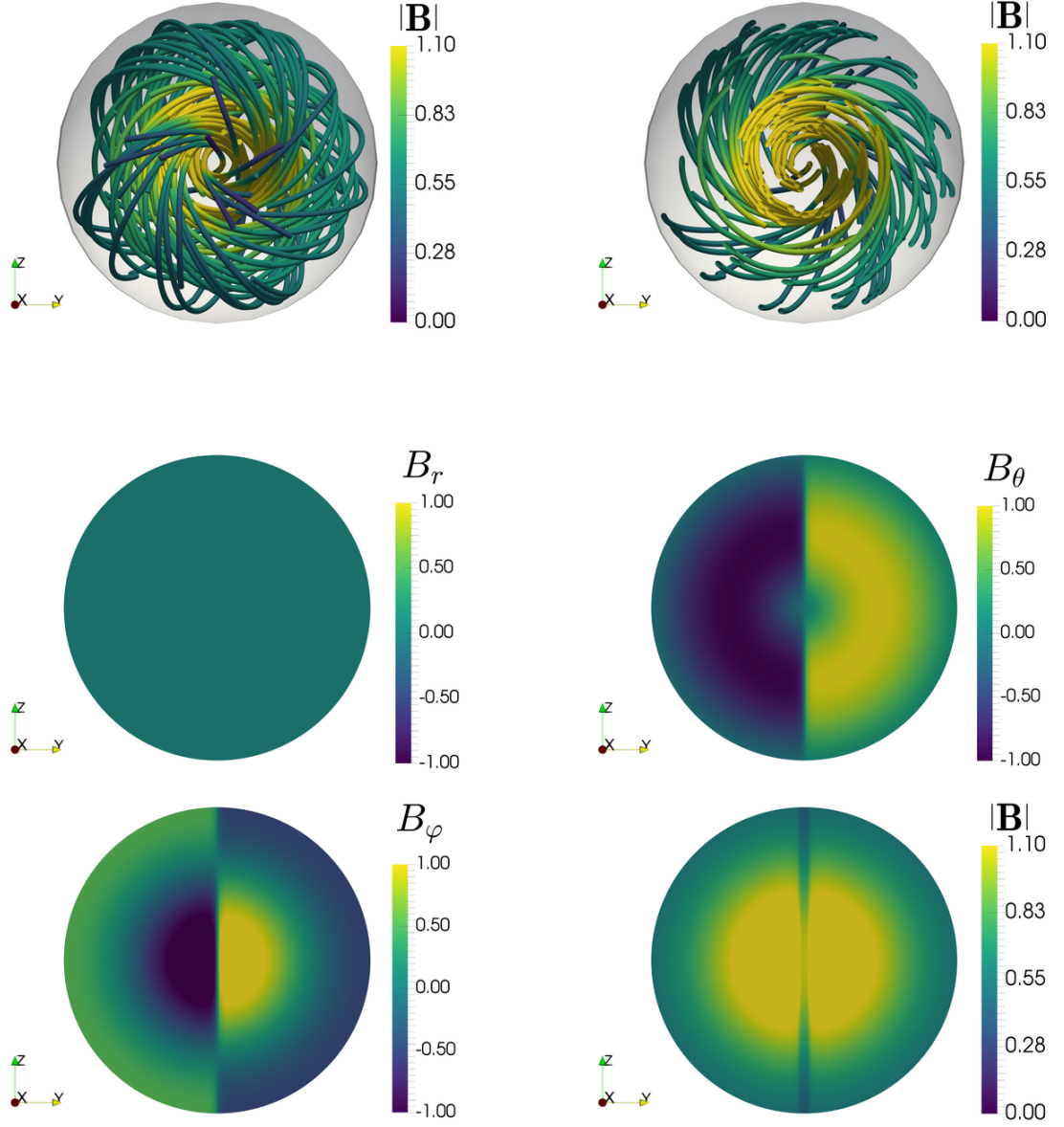
- $q = +1$ $l = +1$ $m = +0$



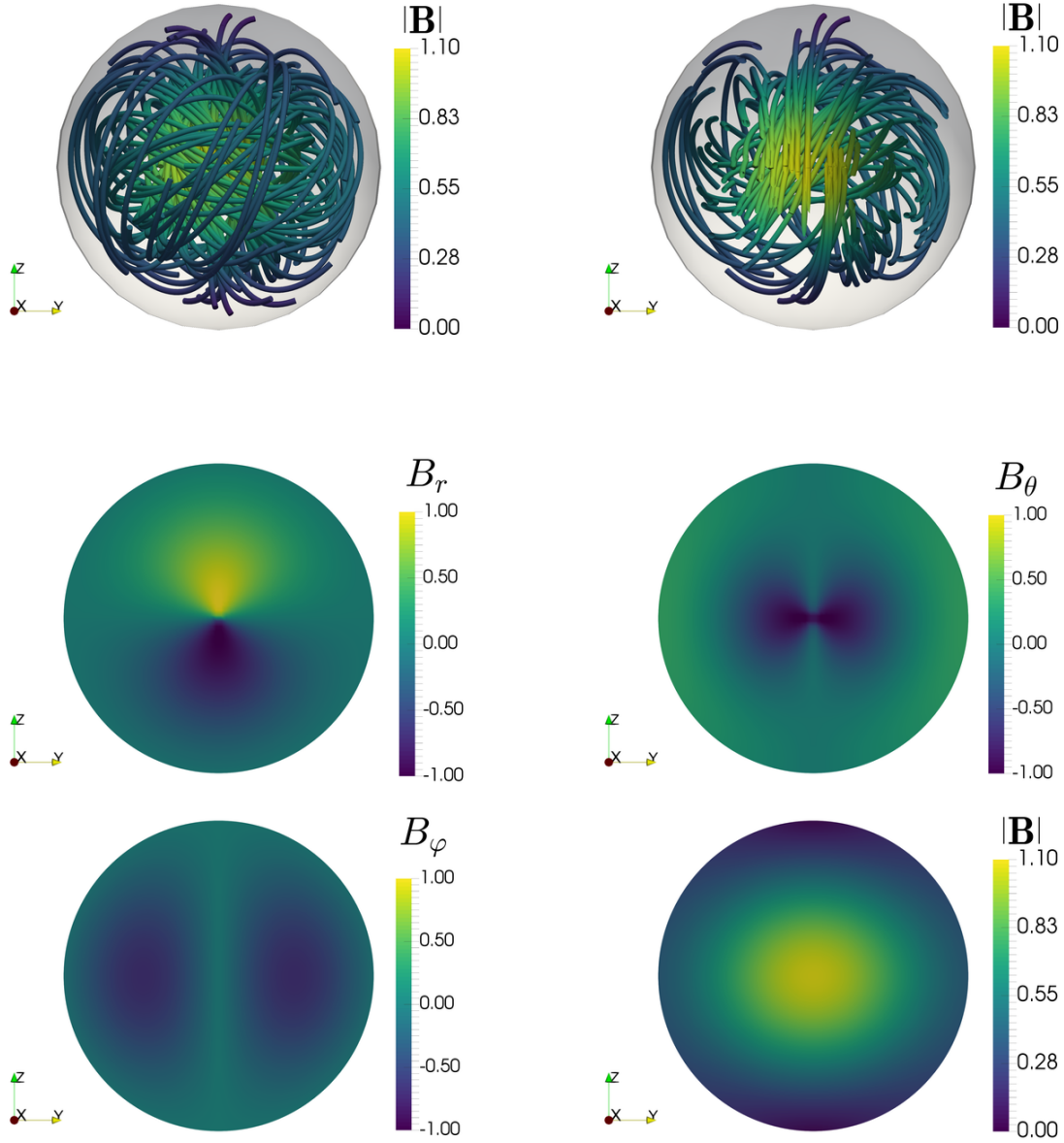
- $q = -1$ $l = +1$ $m = +0$



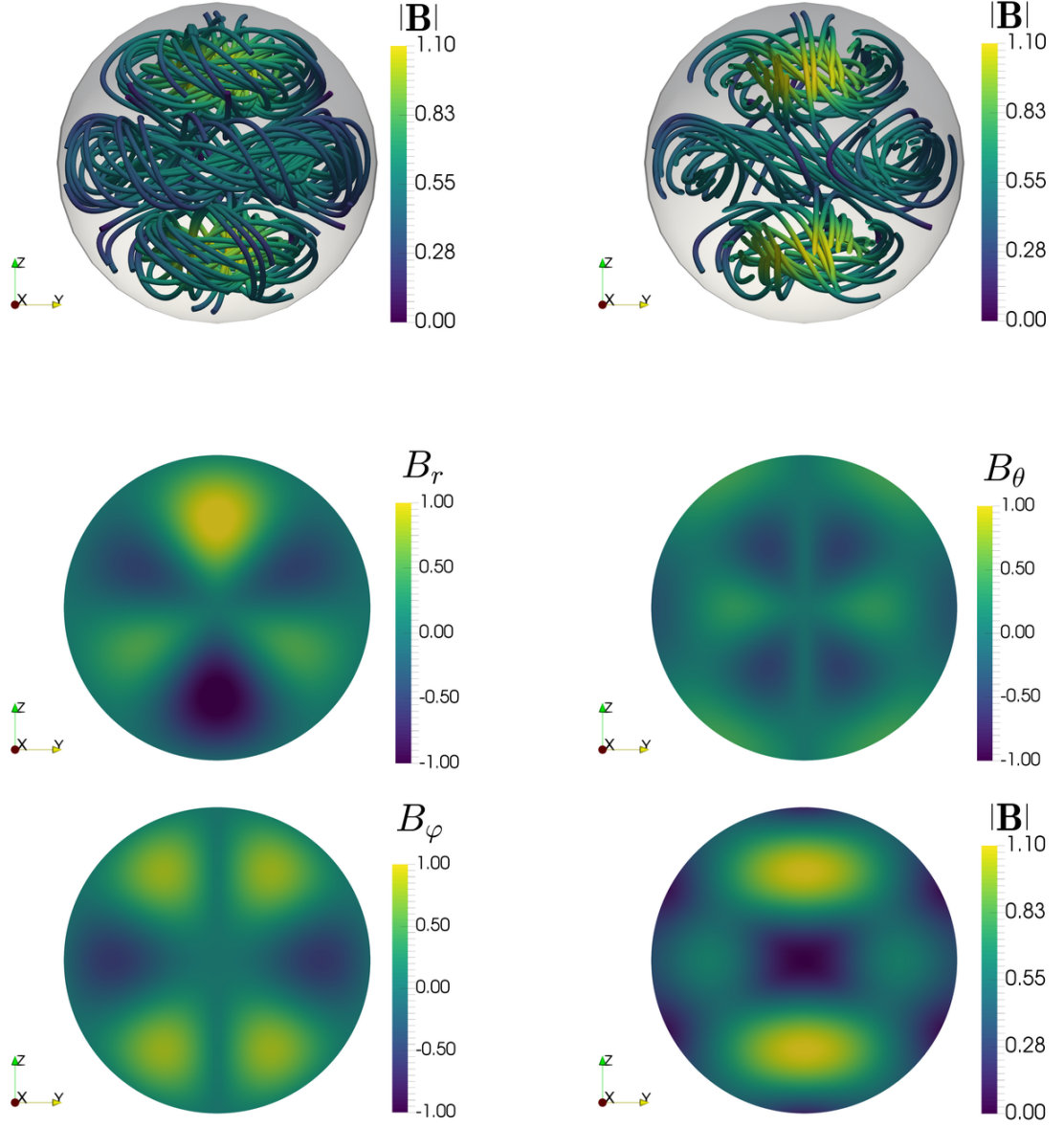
- $q = +1$ $l = +1$ $m = +1$



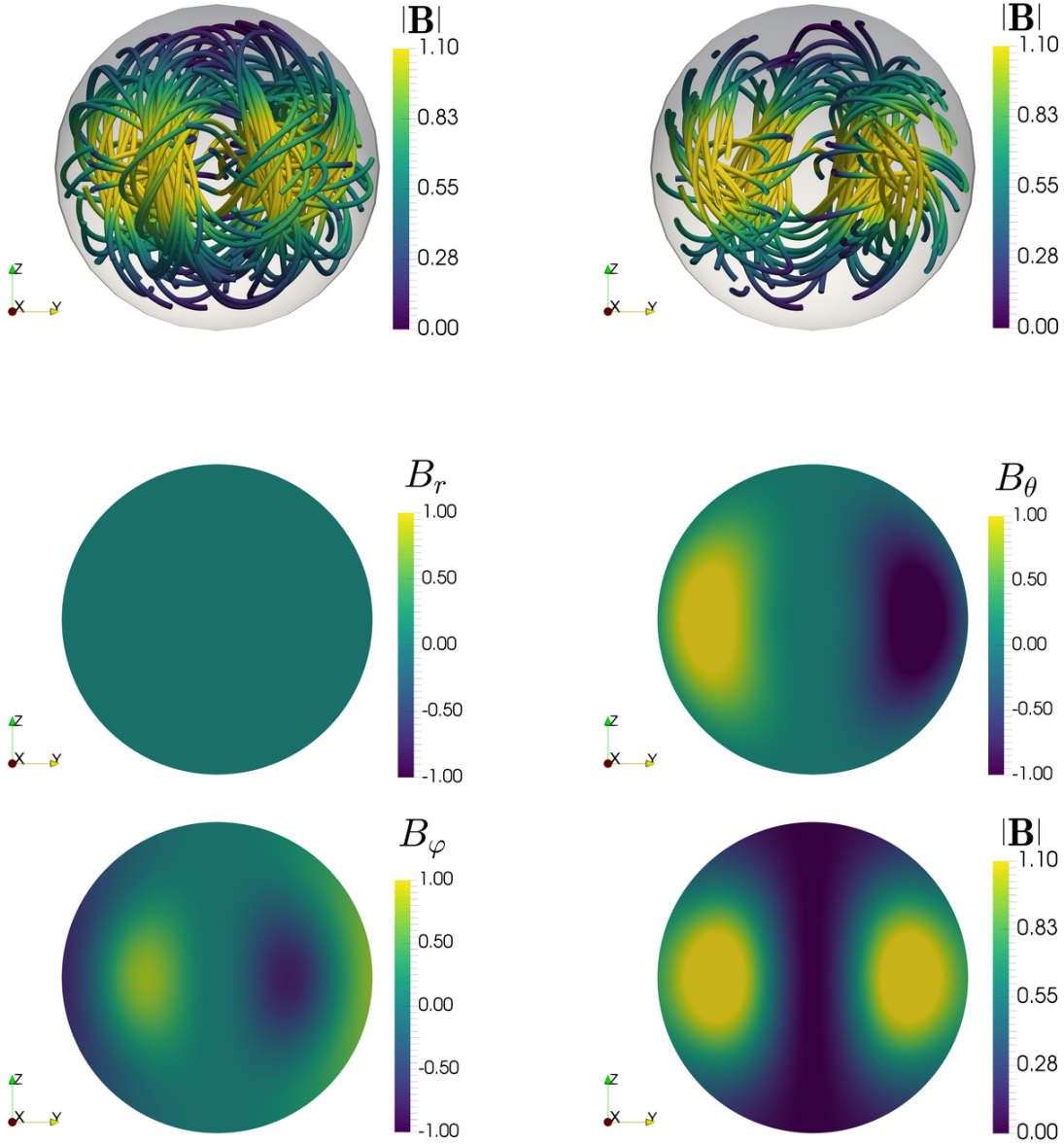
- $q = -1$ $l = +1$ $m = +0$



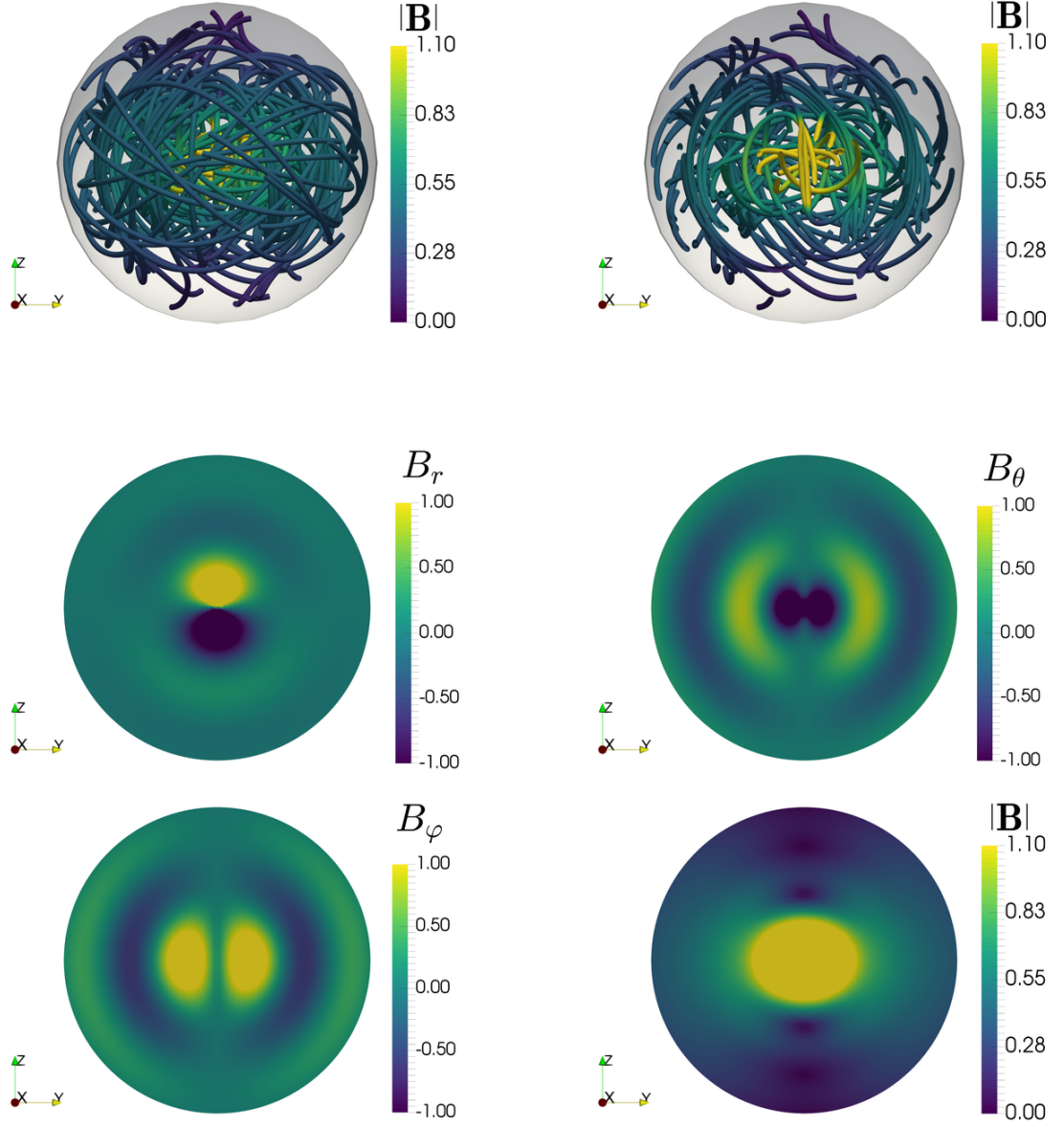
- $q = +1$ $l = +3$ $m = +0$



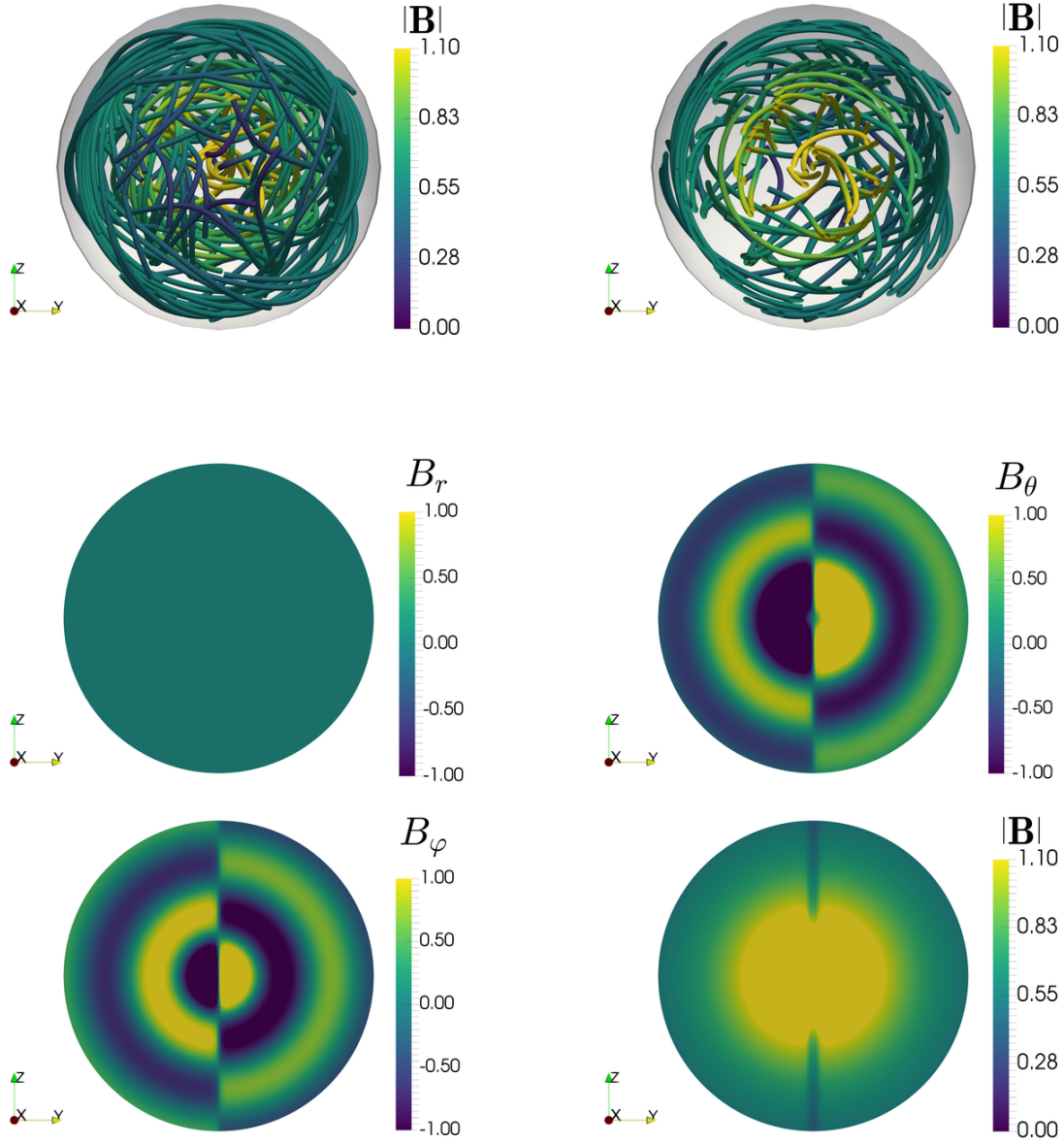
- $q = +1$ $l = +3$ $m = +3$



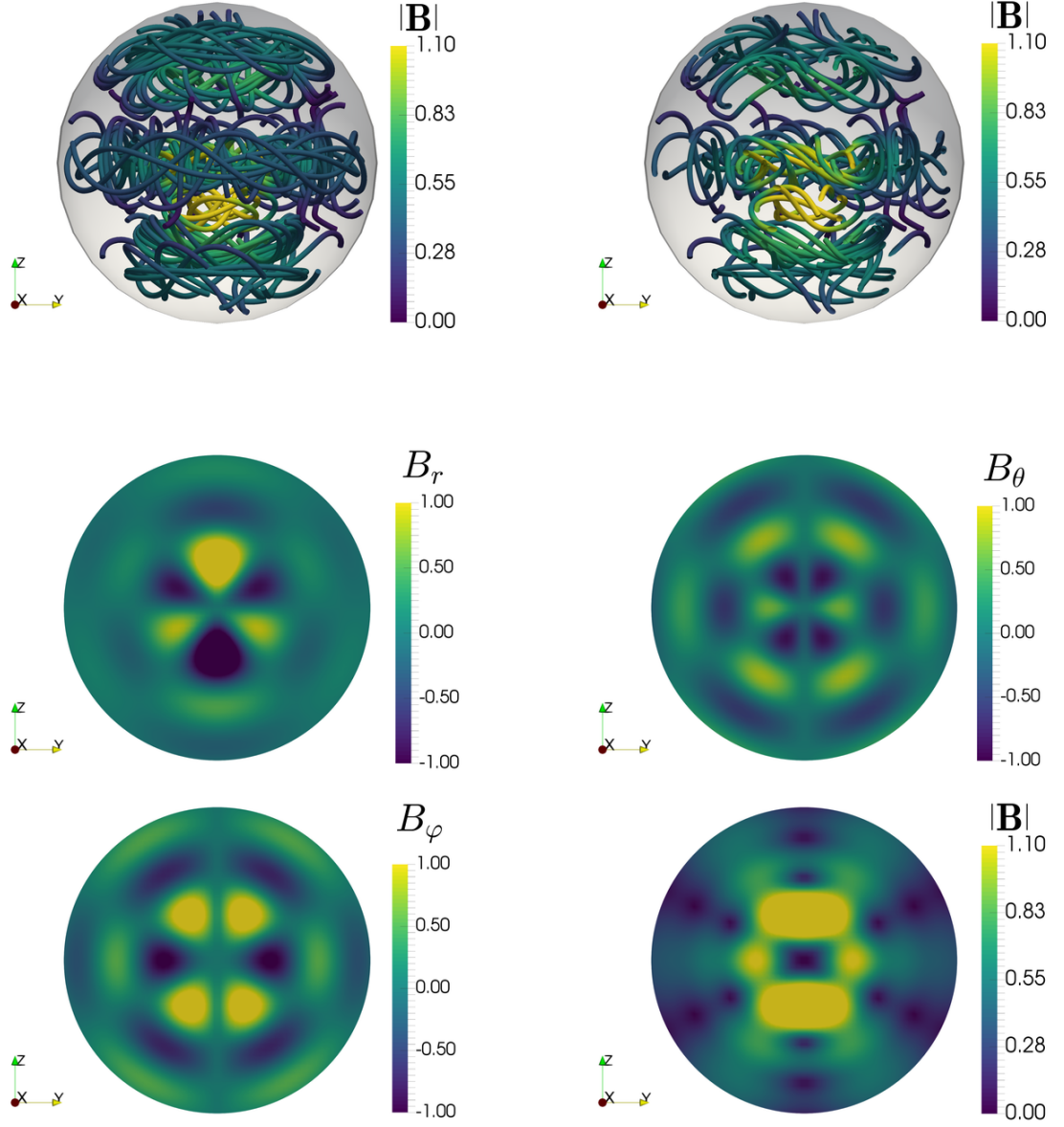
- $q = +3$ $l = +1$ $m = +0$



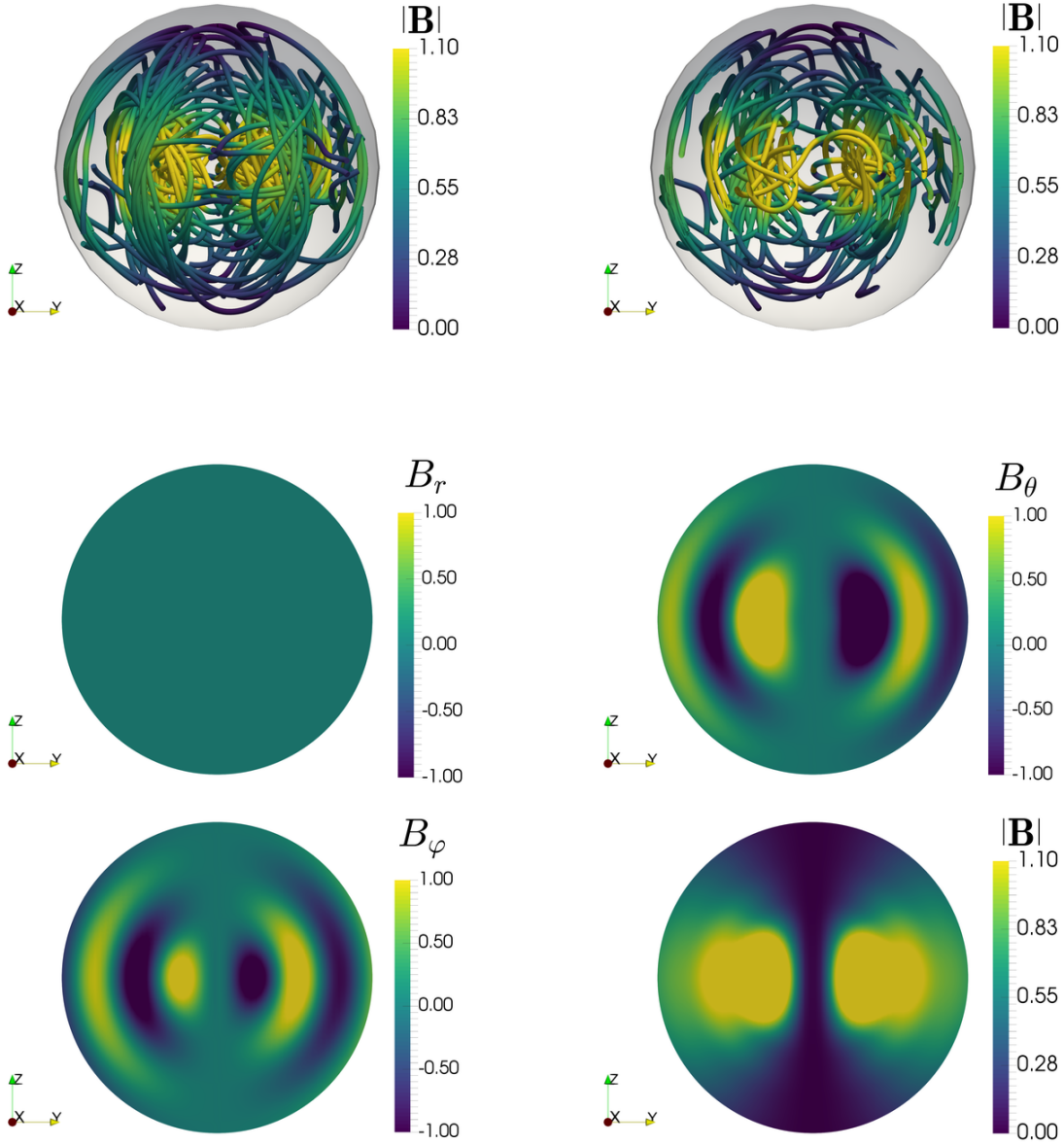
- $q = +3$ $l = +1$ $m = +1$



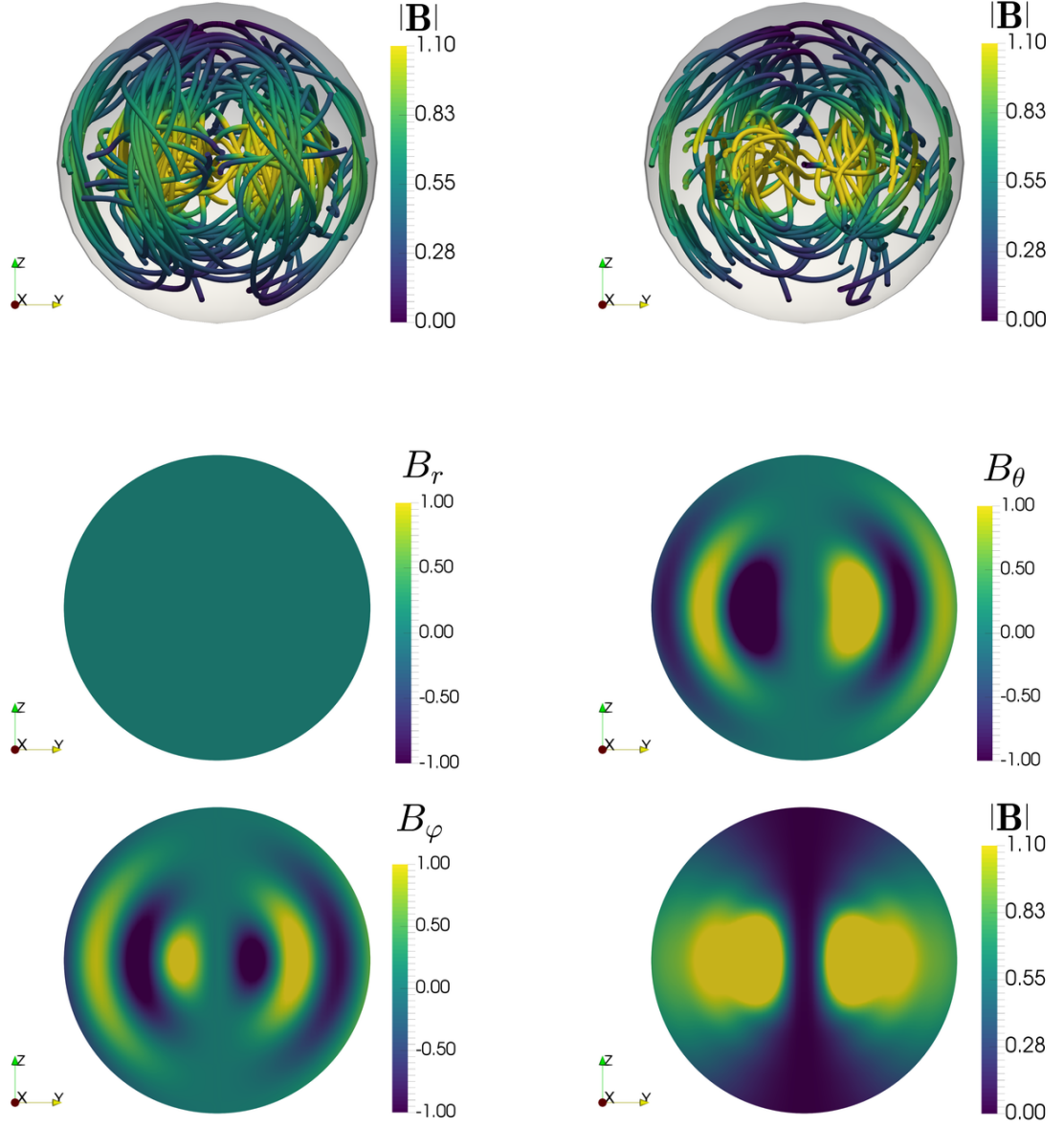
- $q = +3$ $l = +3$ $m = +0$



- $q = +3$ $l = +3$ $m = +3$



- $q = -3$ $l = +3$ $m = +3$



Bibliografía

- Amit, Hagay, Roman Leonhardt y Johannes Wicht (2010). «Polarity reversals from paleomagnetic observations and numerical dynamo simulations». En: *Space Sci. Rev.* 155.1-4, págs. 293-335. ISSN: 00386308. DOI: [10.1007/s11214-010-9695-2](https://doi.org/10.1007/s11214-010-9695-2).
- Andrés, N., Luis Martín, Pablo Dmitruk y D. Gómez (2013). «Effects of electron inertia in collisionless magnetic reconnection». En: *arXiv Prepr.* 21.7, págs. 2-7. ISSN: 1070-664X. DOI: [10.1063/1.4890021](https://doi.org/10.1063/1.4890021). arXiv: [1312.2437](https://arxiv.org/abs/1312.2437). URL: <http://arxiv.org/abs/1312.2437>.
- Aubert, Julien, Hagay Amit y Gauthier Hulot (2007). «Detecting thermal boundary control in surface flows from numerical dynamos». En: *Phys. Earth Planet. Inter.* 160.2, págs. 143-156. ISSN: 00319201. DOI: [10.1016/j.pepi.2006.11.003](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2006.11.003).
- Aubert, Julien, Stéphane Labrosse y Charles Poitou (2009). «Modelling the palaeo-evolution of the geodynamo». En: *Geophys. J. Int.* 179.3, págs. 1414-1428. ISSN: 0956540X. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2009.04361.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2009.04361.x).
- Babcock, Harold D. (1959). «The Sun's Polar Magnetic Field.» En: *Astrophys. J.* 130, pág. 364. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/146726](https://doi.org/10.1086/146726). URL: <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/146726>.
- Backus, G. E. y S Chandrasekhar (1956). «On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos». En: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 42.3, págs. 105-109. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.42.3.105](https://doi.org/10.1073/pnas.42.3.105). URL: papers://f1f22675-95a4-4828-aca2-0d710de1e56f/Paper/p1922%20http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.42.3.105.
- Batchelor, G.K. (1970). *An Introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, págs. 228-244. ISBN: 052104118x.
- Bejan, Adrian (2013). *Convection Heat Transfer*, pág. 696. ISBN: 9781118671627. DOI: [10.1002/9781118671627](https://doi.org/10.1002/9781118671627). URL: <https://books.google.com/books?id=9yC91-gpU8sC%7B%5C%7Dpgis=1%7B%5C%7D5Cnhhttp://doi.wiley.com/10.1002/9781118671627>.
- Braginsky, Stanislav I. y Paul H. Roberts (1995). «Equations governing convection in earth's core and the geodynamo». En: *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 79.1, págs. 1-97. ISSN: 0309-1929. DOI: [10.1080/03091929508228992](https://doi.org/10.1080/03091929508228992). URL: <http://>

- adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-data_query?bibcode=1995GApFD...79...1B%7B%5C%7Dlink_type=ABSTRACT.
- Brown, Maxwell (2010). «The Early History of Geomagnetic Field Reversals». En: *IRM Q.* 20.3. URL: <http://www.irm.umn.edu/quarterly/irmq20-3.pdf>.
- Chandrasekhar, Subramanyan (1956). «on the Stability of the Simplest Solution of the Equations of Hydromagnetics.» En: *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 42.5, págs. 273-276. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.42.5.273](https://doi.org/10.1073/pnas.42.5.273).
- (1959). «Axisymmetric magnetic fields and fluids motions». En: *Astrophys. J.* 124, pág. 232. ISSN: 1098-6596.
- (1981). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Edit. Dover Publication. ISBN: 978-0486640716.
- Chandrasekhar, Subramanyan y Paul C. Kendall (1957). «On force-free magnetic fields». En: *Astrophys. J.* 126.2, págs. 457-460. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/146413](https://doi.org/10.1086/146413).
- Chandrasekhar, Subramanyan y W. H. Reid (1957). «on the Expansion of Functions Which Satisfy Four Boundary Conditions.» En: *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 43.6, págs. 521-527. ISSN: 0027-8424. DOI: [10.1073/pnas.43.6.521](https://doi.org/10.1073/pnas.43.6.521).
- Christensen, Ulrich R., Julien Aubert y Gauthier Hulot (2010). «Conditions for Earth-like geodynamo models». En: *Earth Planet. Sci. Lett.* 296.3-4, págs. 487-496. ISSN: 0012821X. DOI: [10.1016/j.epsl.2010.06.009](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2010.06.009). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2010.06.009>.
- Cleveland, William S. (1979). «Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots». En: *J. Am. Stat. Assoc.* 74.368, págs. 829-836. ISSN: 01621459. DOI: [10.2307/2286407](https://doi.org/10.2307/2286407). arXiv: [/dx.doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038](https://arxiv.org/abs/10.1080/01621459.1979.10481038) [[http:\[\]](http://http://www.jstor.org/stable/2286407)]. URL: <http://www.jstor.org/stable/2286407>.
- Constable, Catherine y Catherine Johnson (2005). «A paleomagnetic power spectrum». En: *Phys. Earth Planet. Inter.* 153.1-3, págs. 61-73. ISSN: 00319201. DOI: [10.1016/j.pepi.2005.03.015](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2005.03.015).
- Cowling, T. G. (1933). «The Magnetic Field of Sunspots». En: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 94.1, págs. 39-48. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/94.1.39](https://doi.org/10.1093/mnras/94.1.39). URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1093/mnras/94.1.39>.
- Davidson, P. A. (2001). «An Introduction to Magnetohydrodynamics». En: pág. 431. ISSN: 00029505. DOI: [10.1119/1.1482065](https://doi.org/10.1119/1.1482065). arXiv: [9809069v1](https://arxiv.org/abs/9809069v1) [arXiv:gr-qc]. URL: <https://books.google.com/books?id=t4dg3scoE5AC%7B%5C%7Dpgis=1>.
- Dmitruk, Pablo y W. H. Matthaeus (2007). «Low-frequency 1f fluctuations in hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 76.3, págs. 1-8. ISSN: 15393755. DOI: [10.1103/PhysRevE.76.036305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.036305).
- Dmitruk, P., P. D. Mininni, A. Pouquet, S. Servidio y W. H. Matthaeus (2011). «Emergence of very long time fluctuations and 1/f noise in ideal flows». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 83.6, págs. 1-15. ISSN: 15393755. DOI: [10.1103/PhysRevE.83.066318](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.066318). arXiv: [arXiv:1105.5323v1](https://arxiv.org/abs/1105.5323v1).
- (2014). «Magnetic field reversals and long-time memory in conducting flows». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 90.4, págs. 1-7. ISSN: 15502376. DOI: [10.1103/PhysRevE.90.043010](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.043010). arXiv: [1409.7568](https://arxiv.org/abs/1409.7568).

- Driscoll, Peter y Peter Olson (2009). «Polarity reversals in geodynamo models with core evolution». En: *Earth Planet. Sci. Lett.* 282.1-4, págs. 24-33. ISSN: 0012821X. DOI: [10.1016/j.epsl.2009.02.017](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.02.017). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2009.02.017>.
- Dutta, P. y P. M. Horn (1981). «Low-frequency fluctuations in solids: 1f noise». En: *Rev. Mod. Phys.* 53.3, págs. 497-516. ISSN: 00346861. DOI: [10.1103/RevModPhys.53.497](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.53.497).
- Ferriz-Mas, Antonio y Manuel Núñez (2003). *Advances in Nonlinear Dynamos*. CRC Press. ISBN: 041528788X. URL: <https://www.crcpress.com/Advances-in-Nonlinear-Dynamos/Ferriz-Mas-Nunez/p/book/9780415287883>.
- Gallavotti, Giovanni (2015). *Foundations of Fluid Dynamics*. URL: <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/libri.html>.
- Gilbert, William (1893). *De Magnete (Translated by P. Fleury Mottelay)*.
- Glatzmaier, G.A. y P.H. Roberts (1995). «A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal». En: *Nature* 377.6546, págs. 203-209. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/377203a0](https://doi.org/10.1038/377203a0). URL: papers3://publication/uuid/FC93F478-2CAD-4F55-9FB0-F549A785818D.
- Glen, Jonathan M. G., Robert S. Coe y Joseph C. Liddicoat (1999). «A detailed record of paleomagnetic field change from Searles Lake, California: 2. The Gauss/Matuyama polarity reversal». En: *J. Geophys. Res. Solid Earth* 104.B6, págs. 12883-12894. ISSN: 01480227. DOI: [10.1029/1999JB900048](https://doi.org/10.1029/1999JB900048). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/1999JB900048>.
- Goedbloed, J. P. y Stefaan Poedts (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Vol. 6, pág. 613. ISBN: 0521626072. DOI: [10.1017/CB09780511616945](https://doi.org/10.1017/CB09780511616945). URL: http://books.google.co.uk/books/about/Principles_of_Magnetohydrodynamics.html?id=FvM6rMJob-cC%7B%5C%7Dpgis=1.
- Goluskin, David (2016). *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham: Springer International Publishing, pág. 64. ISBN: 978-3-319-23939-2. DOI: [10.1007/978-3-319-23941-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23941-5). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-23941-5>.
- Gómez, Daniel, Luis N. Martín y Pablo Dmitruk (2013). «Magnetohydrodynamics in solar and space physics». En: *Adv. Sp. Res.* 51.10, págs. 1916-1923. ISSN: 02731177. DOI: [10.1016/j.asr.2012.09.016](https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.09.016).
- Griffiths, David J. (2012). *Introduction to Electrodynamics*. 4.^a ed. Pearson. ISBN: 0321856562. URL: <http://www.amazon.com/Introduction-Electrodynamics-4th-David-Griffiths/dp/0321856562%7B%5C%7D3FSubscriptionId%7B%5C%7D3D0JYN1NVW651KCA56C102%7B%5C%7D26tag%7B%5C%7D3Dtechkie-20%7B%5C%7D26linkCode%7B%5C%7D3Dxm2%7B%5C%7D26camp%7B%5C%7D3D2025%7B%5C%7D26creative%7B%5C%7D3D165953%7B%5C%7D26creativeASIN%7B%5C%7D3D0321856562>.
- Gupta, S. V. (2009). *Units of measurement. Past, Present and Future. International System of Units*. Springer. ISBN: 9783642007378. URL: <https://www.amazon.com/Units-Measurement-International-Springer-Materials/dp/3642007376>.

- Heirtzler, J. R., G. O. Dickson, E. M. Herron, W. C. Pitman y X. Le Pichon (1968). «Marine magnetic anomalies, geomagnetic field reversals, and motions of the ocean floor and continents». En: *J. Geophys. Res.* 73.6, págs. 2119-2136. ISSN: 01480227. DOI: [10.1029/JB073i006p02119](https://doi.org/10.1029/JB073i006p02119). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/JB073i006p02119>.
- Hesse, Mary B. (1955). «Action in at a Distance Physics Classical». En: *Isis* 46.4, págs. 337-353. DOI: [10.2307/0227576](https://doi.org/10.2307/0227576).
- Hide, R. y T. N. Palmer† (1982). «Generalization of Cowling's theorem». En: *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 19.3-4, págs. 301-309. ISSN: 0309-1929. DOI: [10.1080/03091928208208961](https://doi.org/10.1080/03091928208208961). URL: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03091928208208961>.
- Ingham, Malcolm y Gillian Turner (2008). «Behaviour of the geomagnetic field during the Matuyama-Brunhes polarity transition». En: *Phys. Earth Planet. Inter.* 168.3-4, págs. 163-178. ISSN: 00319201. DOI: [10.1016/j.pepi.2008.06.008](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2008.06.008).
- Israelachvili, Jacob N. (2010). *Intermolecular and Surface Forces, Third Edition*. Academic Press, págs. 312-313. ISBN: 9780123751829.
- Jackson, John David (1975). *Classical Electrodynamics*. 2.^a ed. Wiley. ISBN: 047130932X.
- Kendal, Wayne S. y Bent Jörgensen (2011). «Tweedie convergence: A mathematical basis for Taylor's power law, 1/f noise, and multifractality». En: *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.* 84.6, págs. 1-10. ISSN: 15393755. DOI: [10.1103/PhysRevE.84.066120](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.066120).
- Kono, Masaru, N. Olsen, G. Hulot, T.J. Sabaka, W. Baumjohann, J.S. Gee, D.V. Kent, C. Laj, J.E.T. Channell, M.E. Purucker, K.A. Whaler, A. Jackson, S. Constable, C.C. Finlay, D.J. Dunlop, Ö. Özdemir, G.M. Turner, C. Constable, J.L. Rasson, C.V. Reeves, R. Nakamura, C.L. Johnson, P. McFadden, L. Tauxe, T. Yamazaki, T.D. Raub, J.L. Kirschvink y D.A.D. Evans (2007). *Geomagnetism*. Ed. por Masaru Kono y Gerald Schubert. 1.^a ed. Vol. 5. Elsevier.
- Krause, F. y K. H. Radler (1980). *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. Pergamon Press. ISBN: 0080250416.
- Kress, Brian T. y David C. Montgomery (2000). «Pressure determinations for incompressible fluids and magnetofluids». En: *J. Plasma Phys.* 64, págs. 371-377. ISSN: 0022-3778. DOI: [10.1017/S0022377800008825](https://doi.org/10.1017/S0022377800008825). arXiv: [0011018 \[physics\]](https://arxiv.org/abs/physics/0011018). URL: <http://arxiv.org/abs/physics/0011018>.
- Laj, Carlo, Alain Mazaud, Robin Weeks, Michael Fuller y Emilio Herrero-Bervera (1992). «Geomagnetic reversal paths». En: *Nature* 359.6391, págs. 111-112. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/359111b0](https://doi.org/10.1038/359111b0). URL: <http://www.nature.com/doifinder/10.1038/359111b0>.
- Langel, R. A. y R. H. Estes (1982). «A geomagnetic field spectrum». En: *Geophys. Res. Lett.* 9.4, págs. 250-253. ISSN: 00948276. DOI: [10.1029/GL009i004p00250](https://doi.org/10.1029/GL009i004p00250). URL: <http://doi.wiley.com/10.1029/GL009i004p00250>.
- Larson, Roger L. y Walter C. Pitman (1972). «World-Wide Correlation of Mesozoic Magnetic Anomalies, and Its Implications». En: *Geol. Soc. Am. Bull.* 83.12, pág. 3645. ISSN: 0016-7606. DOI: [10.1130/0016-7606\(1972\)83\[3645:WCOMMA\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1130/0016-7606(1972)83[3645:WCOMMA]2.0.CO;2).

- URL: [http://gsabulletin.gsapubs.org/cgi/doi/10.1130/0016-7606\(1972\)83\[3645:WCOMMA\]2.0.CO;2](http://gsabulletin.gsapubs.org/cgi/doi/10.1130/0016-7606(1972)83[3645:WCOMMA]2.0.CO;2).
- Lifshitz, L. D., L. P. Pitaevskii y E.M. Landau (1984). *Electrodynamics of Continuous Media, Second Edition: Volume 8 (Course of Theoretical Physics)*. 2.^a ed. Butterworth-Heinemann, págs. 225-253. URL: <http://amazon.com/o/ASIN/0750626348/>.
- Machlup, Stefan (1981). «Earthquakes, Thunderstorms and other 1/f noises». En: *Six Int. Conf. Noise Phys. Syst.* Ed. por P.H.E. Meijer, R.D. Mountain y R.J. Jr. Soulen. Washington DC, págs. 157-160. URL: https://books.google.com.ar/books?id=e3VPJTik_HgC%7B%5C%7Dpg=PA157%7B%5C%7Dlpg=PA157%7B%5C%7Ddq=Machlup+Earthquakes,+Thunderstorms+and+Other+1/f+Noises%7B%5C%7Dsource=bl%7B%5C%7Dots=0JrHMN4BDz%7B%5C%7Dsig=-A8bi0MX_UyXghMVberQT_wAC5g%7B%5C%7Dhl=en%7B%5C%7Dsa=X%7B%5C%7Dved=0ahUKEwiyrqewwqnRAhWEPpAKHb86A9oQ6AEIGjAA%7B%5C%7Dv=onepage%7B%5C%7Dq=M.
- Mattis, Daniel C. (1981). *The Theory of Magnetism I*. Vol. 17. Springer Series in Solid-State Sciences. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, págs. 0-37. ISBN: 978-3-540-18425-6. DOI: 10.1007/978-3-642-83238-3. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-83238-3>.
- Mininni, Pablo D. y David C. Montgomery (2006). «Magnetohydrodynamic activity inside a sphere». En: *Phys. Fluids* 18.11, págs. 1-13. ISSN: 10706631. DOI: 10.1063/1.2393438. arXiv: 0602147v2 [arXiv:physics].
- Mininni, Pablo D., David C. Montgomery y L. Turner (2007). «Hydrodynamic and magnetohydrodynamic computations inside a rotating sphere». En: *New J. Phys.* 9.8, págs. 303-303. ISSN: 1367-2630. DOI: 10.1088/1367-2630/9/8/303. arXiv: 0702082 [physics]. URL: <http://arxiv.org/abs/physics/0702082>.
- Monchaux, R., M Berhanu, S Aumaître, A Chiffaudel, F Daviaud, B Dubrulle, F Ravelet, S Fauve, N Mordant, F Pétrélis, M Bourgoin, P Odier, J Pinton, N Plihon y R Volk (2009). «The von Kármán Sodium experiment: Turbulent dynamical dynamos». En: *Phys. Fluids* 21.3, pág. 35108. ISSN: 10706631. DOI: 10.1063/1.3085724. URL: <papers://f1f22675-95a4-4828-aca2-0d710de1e56f/Paper/p3133>.
- Montgomery, David, Leaf Turner y George Vahala (1978). «Three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence in cylindrical geometry». En: *Phys. Fluids* 21.5, págs. 757-764. ISSN: 00319171. DOI: 10.1063/1.862295.
- Montroll, Elliot W. y Michael F. Shlesinger (1982). «On 1/f noise and other distributions with long tails». En: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 79.May, págs. 3380-3383.
- Olson, Peter L., Gary A. Glatzmaier y Robert S. Coe (2011). «Complex polarity reversals in a geodynamo model». En: *Earth Planet. Sci. Lett.* 304.1-2, págs. 168-179. ISSN: 0012821X. DOI: 10.1016/j.epsl.2011.01.031. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2011.01.031>.
- Olson, Peter, F. Nimmo, Paul H. Roberts, R. Holme, C. A. Jones, P. Cardin, I. Sumita, M. I. Bergman, Gary A. Glatzmaier, Robert S. Coe, D. E. Loper, A. Tilgner, U. R. Christensen, J. Wicht y B. A. Buffett (2007). *Core Dynamics*. Ed. por Peter Olson y Gerald Schubert. 1.^a ed. Vol. 8. Elsevier.

- Ponty, Yannick, Hélène Politano y Jean François Pinton (2004). «Simulation of induction at low magnetic prandtl number». En: *Phys. Rev. Lett.* 92.14, págs. 144503-1. ISSN: 00319007. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.144503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.144503). arXiv: [0311130 \[physics\]](https://arxiv.org/abs/0311130).
- Roberts, Paul H. (1967). *An Introduction to magnetohydrodynamics*. Longmans.
- Roberts, Paul H y Eric M King (2013). «On the genesis of the Earth's magnetism». En: *Reports Prog. Phys.* 096801. ISSN: 0034-4885. DOI: [10.1088/0034-4885/76/9/096801](https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/9/096801).
- Roberts, Paul y Gary Glatzmaier (2000). «Geodynamo theory and simulations». En: *Rev. Mod. Phys.* 72.4, págs. 1081-1123. ISSN: 0034-6861. DOI: [10.1103/RevModPhys.72.1081](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.1081).
- Sanchez, Sabrina, Alexandre Fournier, Julien Aubert, Catherine Constable, Johannes Wicht, Julien Aubert y Sabrina Sanchez (2016). «Assimilation of geomagnetic data into dynamo models, an archeomagnetic study». Tesis doct.
- Smith, J.P. (1968). «Pre-gilbertian conceptions of terrestrial magnetism». En: *Tectonophysics* 6, págs. 499-510.
- Stern, David P. (2004). *The Great Magnet, the Earth*. URL: <http://www-spf.gsfc.nasa.gov/earthmag/dmglis.htm> (visitado 09-02-2016).
- Vine, F. J. y D. H. Matthews (1963). «Magnetic Anomalies Over Oceanic Ridges». En: *Nature* 199.4897, págs. 947-949. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/199947a0](https://doi.org/10.1038/199947a0). URL: <http://www.nature.com/doi/10.1038/199947a0>.
- Wang, Qing, Olaf Ronneberger y Hans Burkhardt (2008). «Fourier analysis in polar and spherical coordinates». En: *Folia Phoniatr. Logop.* 56.5, págs. 305-320. ISSN: 01628828. DOI: [10.1109/TPAMI.2009.29](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2009.29). URL: http://lmb.informatik.uni-freiburg.de/Publications/2008/WRB08/wa_report01_08.pdf%7B%5C%7D5Cnhttp://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.152.9411%7B%5C%7Drep=rep1%7B%5C%7Dtype=pdf.
- Wheeler, John Archibald y Richard Phillips Feynman (1949). «Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action». En: *Rev. Mod. Phys.* 21.3, págs. 425-433. ISSN: 00346861. DOI: [10.1103/RevModPhys.21.425](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.21.425).
- Yoshida, Zensho (1991). «Discrete Eigenstates of Plasmas Described by the Chandrasekhar-Kendall Functions». En: *Prog. Theor. Phys.* 86.1, págs. 45-55. ISSN: 0033-068X, 1347-4081. DOI: [10.1143/ptp/86.1.45](https://doi.org/10.1143/ptp/86.1.45). URL: <http://ptp.oxfordjournals.org/content/86/1/45.full.pdf>.
- Yoshida, Zensho y Yoshikazu Giga (1990). «Remarks on spectra of operator rot». En: *Math. Zeitschrift* 204.1, págs. 235-245. ISSN: 00255874. DOI: [10.1007/BF02570870](https://doi.org/10.1007/BF02570870).
- Ziegler, L. B. y C. G. Constable (2011). «Asymmetry in growth and decay of the geomagnetic dipole». En: *Earth Planet. Sci. Lett.* 312.3-4, págs. 300-304. ISSN: 0012821X. DOI: [10.1016/j.epsl.2011.10.019](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2011.10.019). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2011.10.019>.

Todos los pies de página con referencias biográficas son citas textuales de los correspondientes artículos de Wikipedia en español (es.wikipedia.org). En casos particulares donde los mismos no existían, se realizó una traducción de la entrada correspondiente a la versión en inglés (en.wikipedia.org).